I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőtlenség a triviális

$$0 \leqslant ab(a-c)^2 + bc(b-a)^2 + ca(c-b)^2$$

egyenlőtlenség átrendezése.

II. megoldás. Alkalmazzuk a pozitív $\frac{a}{\sqrt{c}}, \frac{b}{\sqrt{a}}, \frac{c}{\sqrt{b}}$, illetve $\sqrt{c}, \sqrt{a}, \sqrt{b}$ számhármasokra a Cauchy–Bunyakovszkij–Schwarz-egyenlőtlenséget:

$$\left(\frac{a}{\sqrt{c}} \cdot \sqrt{c} + \frac{b}{\sqrt{a}} \cdot \sqrt{a} + \frac{c}{\sqrt{b}} \cdot \sqrt{b}\right)^2 \leqslant \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(c+a+b), \quad \text{azaz}$$
$$(a+b+c)^2 \leqslant \left(\frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{a} + \frac{c^2}{b}\right)(a+b+c).$$

Mivel $a+b+c$ pozitív, leoszthatunk vele:

$$a+b+c \leqslant \frac{a^2}{c} + \frac{b^2}{c} + \frac{c^2}{b}.$$

Ezt pedig abc-vel szorozva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

III. megoldás. A súlyozott számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenséget fogjuk felhasználni az $\frac{1}{7}, \frac{2}{7}, \frac{4}{7}$ súlyokkal.

$$\begin{gathered} a^3b + b^3c + c^3a = \\ = \left(\frac{1}{7}a^3b + \frac{2}{7}b^3c + \frac{4}{7}c^3a\right) + \left(\frac{2}{7}a^3b + \frac{4}{7}b^3c + \frac{1}{7}c^3a\right) + \left(\frac{4}{7}a^3b + \frac{1}{7}b^3c + \frac{2}{7}c^3a\right) \geqslant \\ \geqslant (a^3b)^{1/7}(b^3c)^{2/7}(c^3a)^{4/7} + (a^3b)^{2/7}(b^3c)^{4/7}(c^3a)^{1/7} + (a^3b)^{4/7}(b^3c)^{1/7}(c^3a)^{2/7} = \\ = abc^2 + ab^2c + a^2bc = abc(a+b+c). \end{gathered}$$

Futó Gábor (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.)

Megjegyzés. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $a = b = c$. Ez az első megoldásból közvetlenül látszik, de a másik két megoldásból is könnyen leolvasható.