Legyen a V térfogatú, A felszínű tetraéder beírt gömbjének középpontja O. Az O pontot a csúcsokkal összekötve a tetraédert olyan gúlákra bontjuk, amelyek alaplapja a tetraéder egy-egy lapja, magassága pedig a beírt gömb r sugara. Ezeknek a gúláknak a térfogatát összeadva a tetraéder térfogatát kapjuk. Ezért $V = \frac{A \cdot r}{3}$. Vegyünk fel egy O-n átmenő tetszőleges síkot. Ez a sík a tetraédert egy V_1, illetve V_2 térfogatú részre vágja, legyen a V_1 térfogatú testhez tartozó felszínrész A_1, a másik A_2. A szóban forgó sík az előbb említett gúlák némelyikét nem metszi, másokat pedig két O csúcsú gúlára vág szét, ezért

$$V_1 = \frac{A_1 \cdot r}{3} \text{ és } V_2 = \frac{A_2 \cdot r}{3}. \tag{1}$$

Az F. 2853. feladat megoldásában bebizonyítottuk, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontján átmenő bármely sík felezi a tetraéder térfogatát. Tekintsük azt a síkot, amely két szemközti él felezőpontján és az O ponton megy át. Ez a sík felezi a tetraéder térfogatát azaz $V_1 = V_2$, ezért (1)-ből $A_1 = A_2$. Tehát létezik olyan sík, amely adott tetraédert két egyenlő felszínű és térfogatú részre vág szét.

Megjegyzések. 1. Abban a speciális helyzetben, ha az O pont ráesik egy szemben fekvő élpár felezőpontjait összekötő egyenesre, az említett sík határozatlan, mindegyik sík megfelelő; pl. az F. 2847. feladat egyenlő oldalú tetraéderében és a szabályos tetraéderben.

2. Többen a következőképpen írták le a feladat megoldását:

Az F. 2853. feladat megoldásakor bebizonyítottuk, hogy a tetraéder két szemközti élének felezőpontján átmenő sík felezi a tetraéder térfogatát. Tekintsünk egy ilyen S síkot. A résztest felszíne – a metszetlap területe nélkül – legyen $A_1(\phi)$ illetve $A_2(\phi)$, ahol ϕ S-nek és egy rögzített síknak a hajlásszöge. Ha $A_1(\phi) = A_2(\phi)$, akkor készen vagyunk. Tegyük fel ezután, hogy $A_1(\phi) > A_2(\phi)$, azaz $A_1(\phi) - A_2(\phi) > 0$. Forgassuk el S-et a tetraéder eme két szemközti élének felezőpontját összekötő egyenes körül 180°-kal. Ekkor $A_1(\phi + 180°) = A_2(\phi)$ és $A_2(\phi + 180°) = A_1(\phi)$, hiszen az S sík 180°-os forgatás után önmagába megy át. Ezért $A_1(\phi + 180°) - A_2(\phi + 180°) = A_2(\phi) - A_1(\phi) < 0$. Feltéve hogy $A_1(\phi) - A_2(\phi)$ folytonosan változott, Bolzano tétele szerint lesz a $(0°; 180°)$ intervallumban egy olyan ϕ_0 szög, amelyre $A_1(\phi_0) - A_2(\phi_0) = 0$, tehát $A_1(\phi_0) = A_2(\phi_0)$. – Ez megoldás is helyes, de csak vázlatosnak tekinthető. Az $A_1(\phi)$ és $A_2(\phi)$ felszínekre intuitíven feltételezett folytonosságot igazolni kellene.