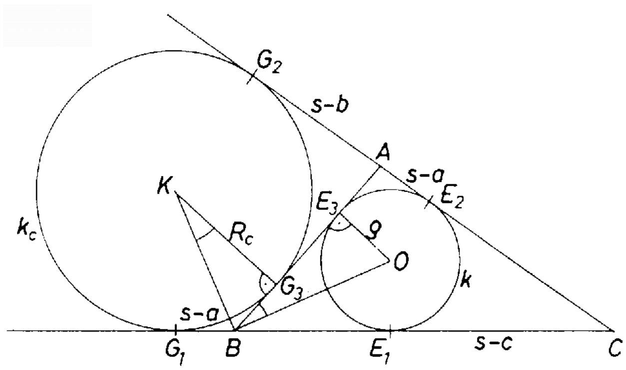
1. Felidézünk néhány összefüggést a háromszög beírt és hozzáírt köreinek érintőszakaszai és a kerület bizonyos részei között. Ismeretes, hogy az ABC háromszög beírt körének érintési pontjai közül kettő pl. az A csúcstól $s-a$ távolságra van. Ezért az *1. ábra* jelölései szerint



1. ábra

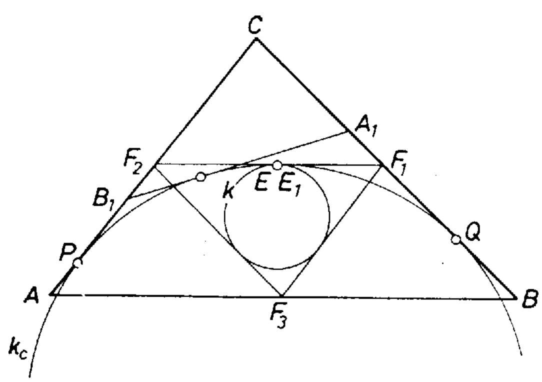
(1) $$AE_2 = AE_3 = s-a; \quad BE_1 = BE_3 = s-b; \quad CE_1 = CE_2 = s-c.$$

Hasonlóan a c oldalhoz hozzáírt kör érintési pontjaira:

(2) $$AG_2 = AG_3 = s-b; \quad BG_1 = BG_3 = s-a; \quad CG_1 = CG_2 = s.$$

Az *1. ábrán* egy ívvel jelölt merőleges szárú szögpárok révén az OBE_3 és BKG_3 háromszögek hasonlóak, ezért $\dfrac{R_c}{s-a} = \dfrac{s-b}{\varrho}$, amiből $R_c = \dfrac{(s-a)(s-b)}{\varrho}$. A Heron-, illetve a $t = \varrho \cdot s$ képlet felhasználásával

(3) $$R_c = \frac{t}{s-c}.$$



2. ábra

2. Az (1)–(3) képleteinket értelemszerűen alkalmazzuk a vizsgált háromszögekre, a továbbiakban $2s$ ezeknek a kerületét jelentse; vagyis az eddiginek a felét.

Az ABC háromszög oldalainak F, F_2, F_3 felezőpontjai nyilván teljesítik a feladat feltételeit (*2.ábra*). Ha A_1, B_1, C_1 is ilyen pontok, akkor mind a CF_2F_1, mind pedig a CB_1A_1 háromszög kerülete $2s$. Segítségül vesszük az $F_1F_2F_3$ háromszög beírt k körét és a CF_2F_1 háromszög F_2F_1 oldalához hozzáírt k_c kört. Figyelembe véve (2) harmadik egyenlőségét, e két háromszög C-vel szemközti oldalát érintő hozzáírt kör ugyanazokban a pontokban érinti a C-n átmenő oldalak egyenesét – éspedig azokban a P és Q pontokban, amelyekre $CP = CQ = s$ – ezért e két említett kör azonos. Az (1) egyenlőségek szerint $E_1F_1 = s - F_2F_3$, ahol E_1 az $F_1F_2F_3$ háromszög beírt körének érintési pontja, (2) szerint pedig $EF_1 = s - CF_1$, ahol E a CF_2F_1 háromszög hozzáírt körének érintési pontja. Mivel $CF_1 = F_2F_3$, azért $E_1 = E$. Ez azt jelenti, hogy a k és k_c körök ugyanabban az E pontban érintik az F_1F_2 szakaszt, és a k a k_c belsejében van. Ezért az A_1B_1 szakasznak nem lehet k-val közös pontja, hiszen A_1B_1 érinti a k_c kört. (Kivéve, ha A_1 és B_1 egybeesik az F_1 és F_2 pontokkal.) Azt is látjuk, hogy a k kör az A_1B_1 egyenes másik partján van, mint a C pont. Hasonló elmondható a B_1C_1 és C_1A_1 szakaszokra is, tehát az $A_1B_1C_1$ háromszög tartalmazza a k kört, anélkül, hogy oldalainak k-val közös pontja lenne. Pontosabban szólva, ha az A_1, B_1, C_1 pontok között van olyan, amelyik nem esik egybe az F_1, F_2, F_3 valamelyikével, akkor az $A_1B_1C_1$ háromszögnek van olyan oldala, amelyiknek nincs közös pontja a k körrel. Ezért ennek a háromszögnek a beírt köre k-énál nagyobb sugarú, és a $t = \varrho \cdot s$ formulából következően területe nagyobb, mint az $F_1F_2F_3$ háromszög területe.

3. Jelöljük az AB_1C_1, A_1BC_1, A_1B_1C, illetve $F_1F_2F_3$ háromszög területét rendre t_A, t_B, t_C, illetve t_F-fel. Mivel a CA_1B_1 és a CF_2F_1 háromszög C-vel szemközti oldalához tartozó hozzáírt kör azonos, (3) alapján

$$\frac{t_C}{s - A_1B_1} = \frac{t_F}{s - F_1F_2}, \quad \text{így} \quad t_C = t_F \cdot \frac{s - A_1B_1}{s - F_1F_2}.$$

Hasonlóan felírva t_A-t és t_B-t, majd a három egyenlőséget összeszorozva:

$$t_A \cdot t_B \cdot t_C = t_F^3 \frac{(s - A_1B_1)(s - A_1C_1)(s - B_1C_1)}{(s - F_1F_2)(s - F_1F_3)(s - F_2F_3)}.$$

A jobb oldalon a törtet s-sel bővítve és a Heron képletet alkalmazva kapjuk:

(4) $$t_A \cdot t_B \cdot t_C = t_F^3 \cdot \frac{t^2}{t_F^2}, \text{ahol } t \text{ az } A_1B_1C_1 \text{ háromszög területét jelöli.}$$

Korábbi eredményünk szerint $t > t_F$, és így (4)-ből

(5) $$t_A \cdot t_B \cdot t_C > t_F^3.$$

Könnyű belátni, hogy $t_A + t_B + t_C + t = 4t_F$, tehát

(6) $$t_A + t_B + t_C < 3t_F.$$

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

$$t_A \cdot t_B \cdot t_C \le \left(\frac{t_A + t_B + t_C}{3}\right)^3, \text{amit (6)-tal egybevetve}$$

(7) $$t_A \cdot t_B \cdot t_C < t_F^3.$$

Az (5) és (7) egyenlőtlenségek egymásnak ellentmondóak. Ez azt jelenti, hogy az F_1, F_2, F_3 pontokon kívül nincs olyan ponthármas, amely kielégítené a feladat feltételeit.

Párniczky Benedek (Fazekas M. Főv. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A feladat állítása következménye az *N. D. Kazarinoff: Geometriai egyenlőtlenségek* c. könyv 198. oldalán található tételnek. (Ez a tétel azt mondja ki, hogy a négy háromszög közül nem az $A_1B_1C_1$ kerülete a legkisebb.)