Az (x_n) sorozat elemei pozitív valós számok, továbbá minden n pozitív egészre

$$2(x_1+x_2+\ldots+x_n)^4=(x_1^5+x_2^5+\ldots+x_n^5)+(x_1^7+x_2^7+\ldots+x_n^7). \tag{1}$$

Határozzuk meg a sorozat elemeit.

Megoldás. Teljes indukcióval bizonyítjuk, hogy $x_n=n$ minden n pozitív egészre. $n=1$-re az egyenlet:

$$2x_1^4=x_1^5+x_1^7.$$

Átrendezve és szorzattá alakítva:

$$x_1^4(x_1^2+x_1+2)(x_1-1)=0.$$

Ennek az egyetlen pozitív valós gyöke az 1.

Tegyük fel, hogy $k>1$, és hogy ezt a megállapítást megismételtük egymás után az $n=1,2,\ldots,(k-1)$ esetekre, vagyis, hogy

$$x_1=1,\ x_2=2,\ \ldots,\ x_{k-1}=k-1$$

a vizsgálandó sorozatot definiáló egyenlet egyetlen pozitív valós megoldása, ha $n=k-1$. Megmutatjuk, hogy $n=k$-ra (1)-nek egyértelmű megoldása: $x_k=k$.

Írjuk fel a k-adik és a $(k-1)$-edik egyenletet, és vonjuk ki az utóbbit, felhasználva az $1+2+\ldots+(k-1)=\dfrac{k(k-1)}{2}$ azonosságot:

$$2(1+2+\ldots+(k-1)+x_k)^4=\left(1^5+2^5+\ldots+(k-1)^5+x_k^5\right)+\left(1^7+2^7+\ldots+(k-1)^7+x_k^7\right),$$
$$2(1+2+\ldots+(k-1))^4=\left(1^5+2^5+\ldots+(k-1)^5\right)+\left(1^7+2^7+\ldots+(k-1)^7\right),$$
$$2\left(\frac{k(k-1)}{2}+x_k\right)^4-2\left(\frac{k(k-1)}{2}\right)^4=x_k^5+x_k^7.$$

Végezzük el a hatványozásokat és rendezzük az egyenletet:

$$x_k^7+x_k^5-2x_k^4-4k(k-1)x_k^3-3k^2(k-1)^2x_k^2-k^3(k-1)^3x_k=0.$$

x_k-val oszthatunk, hiszen pozitív; a zárójeleket átalakítva:

$$x_k^6+x_k^4-2x_k^3-(4k^2-4k)x_k^2-(3k^4-6k^3+3k^2)x_k-(k^6-3k^5+3k^4-k^3)=0.$$

Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy ennek $x_k=k$ megoldása. Emeljük ki az (x_k-k) gyöktényezőt:

$$(x_k-k)\left(x_k^5+kx_k^4+(k^2+1)x_k^3+(k^3+k-2)x_k^2+(k^4-3k^2+2k)x_k+(k^5-3k^4+3k^3-k^2)\right)=0.$$

Azt állítjuk, hogy a második tényezőben minden együttható pozitív. Ezt nyilván elég a negyediktől kezdve igazolni. Valóban,

$$\begin{aligned}k^3&+k-2\ge k^3+2-2>0,\\ k^4&-3k^2+2k>k^4-4k^2+4=(k^2-2)^2\ge 0 \text{ és}\\ k^5&-3k^4-3k^3-k^2=k^2(k-1)^3>0.\end{aligned}$$

Ezért – mivel $x_k>0$ – a második tényező mindig pozitív, az egyenlet egyetlen pozitív gyöke: $x_k=k$.

Ezzel az állításunkat is igazoltuk.