

Először megmutatjuk, hogy két $x^2 + 3y^2$ alakú szám szorzata is felírható ilyen alakban. Valóban, ha x_1, y_1, x_2, y_2 egész számok, akkor

$$\begin{aligned}(x_1^2 + 3y_1^2)(x_2^2 + 3y_2^2) &= x_1^2x_2^2 + 3x_1^2y_2^2 + 3x_2^2y_1^2 + 9y_1^2y_2^2 = \\ &= (x_1x_2 + 3y_1y_2)^2 + 3(x_1y_2 - x_2y_1)^2.\end{aligned}$$

Legyen a feladatbeli két szám a és b . Bebizonyítjuk, hogy $a^2 - ab + b^2$ is $x^2 + 3y^2$ alakú és mivel $a^3 + b^3 = (a + b)(a^2 - ab + b^2)$, ebből az állítás az előbbiek alapján következik.

Ha a és b egyező párosságú, akkor

$$a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 + 3\left(\frac{a-b}{2}\right)^2,$$

ha vegyes párosságúak és pl. a páros, akkor

$$a^2 - ab + b^2 = \left(\frac{a}{2} - b\right)^2 + 3\left(\frac{a}{2}\right)^2,$$

egy-egy megfelelő felírás.

Lente Gábor (Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.)