

(A permutációk írásmódjáról és a permutációcsoportok néhány alapvető tulajdonságáról lásd Pelikán József Permutációcsoportok című cikkét az 1991/4. számban.)

Legyen $\pi(i)$ annak a helynek a sorszámja, ahova az i -edik lap kerül egy keverés során ($i = 1, 2, \dots, 13$); π az $1, 2, \dots, 13$ számok egy permutációja.

Mivel az i -edik lap az első keverés során a $\pi(i)$ -edik helyre kerül, onnan pedig a második keverés során a $\pi(\pi(i))$ -edik helyre, a kétszeri keverésnek a π^2 permutáció felel meg. A feladat szövege alapján:

$$(1) \quad \begin{aligned} \pi^2 &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 8 & 12 & 6 & 7 & 9 & 11 & 13 & 4 & 2 & 1 & 10 & 3 & 5 \end{pmatrix} = \\ &= (1 \ 8 \ 4 \ 7 \ 13 \ 5 \ 9 \ 2 \ 12 \ 3 \ 6 \ 11 \ 10). \end{aligned}$$

Láthatjuk, hogy π^2 egyetlen, 13 hosszúságú ciklus. Ebből következik, hogy π is egyetlen ciklusból áll, mert ha π legalább 2 (akár egyelemű) ciklusból állna, akkor π^2 -nek is legalább két ciklusa lenne. Legyen $\pi = (1 \ a_1 a_2 \dots a_{12})$, akkor $\pi^2 = (1 \ a_2 a_4 a_6 \dots a_{10} a_{12} a_1 \ a_3 \ a_5 \dots a_{11})$. Ezt (1)-gyel összevetve azt kapjuk, hogy $a_2 = 8$, $a_4 = 4$, $a_6 = 7$, $a_8 = 13$, $a_{10} = 5$, $a_{12} = 9$, $a_1 = 2$, $a_3 = 12$, $a_5 = 3$, $a_7 = 6$, $a_9 = 11$, $a_{11} = 10$, vagyis

$$\begin{aligned} \pi &= (1 \ 2 \ 8 \ 12 \ 4 \ 3 \ 7 \ 6 \ 13 \ 11 \ 5 \ 10 \ 9) = \\ &= \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 & 13 \\ 2 & 8 & 7 & 3 & 10 & 13 & 6 & 12 & 1 & 9 & 5 & 4 & 11 \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

A kártyák sorrendje az első keverés után: 10, 2, 5, Király, Dáma, 8, 4, 3, Bubi, 6, Ász, 9, 7.

Megjegyzés. Mivel π egy 13 hosszúságú ciklus, a $\pi = \pi^{13} \cdot \pi = (\pi^2)^7$ képletből is kiszámítható π .