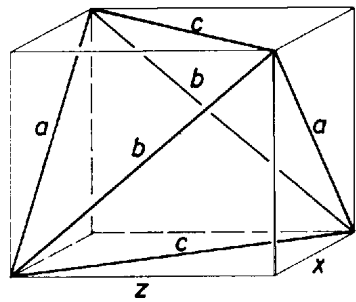
Jelöljük a tetraéder egyik lapjának oldalait a, b és c-vel. Legyen a c-vel szemközti szög 60°. A tetraéder hálózatát elképzelve láthatjuk, hagy a lapok egybevágósága csak úgy lehetséges, ha mindegyik csúcsból egy a, egy b, illetve c hosszúságú él indul ki. Ebből következik, hogy a szemközti élek egyenlők. Ismeretes, hogy minden tetraéder köré írható (két) paralelepipedon úgy, hogy a tetraéder élei a paralelepipedon lapátlói. Ez a paralelepipedon most téglatest lesz, hiszen szemközti lapjain az átlók egyenlők. Legyenek a téglatest élei az *ábra* szerint x, y, z.



A téglatest köré írt gömb egyben a tetraéder körülírt gömbje is, hiszen a tetraéder mindegyik csúcsán átmegy. Ezért a téglatest testátlója 23 cm, és így

(1) $$x^2 + y^2 + z^2 = 23^2.$$

A tetraéder éleire mint a téglatest lapátlóira a Pitagorasz-tételt alkalmazva:

$$x^2 + y^2 = a^2; \quad y^2 + z^2 = b^2; \quad z^2 + x^2 = c^2.$$

Ezeket az egyenlőségeket összeadva, majd (1)-et fölhasználva a következőt kapjuk:

(2) $$a^2 + b^2 + c^2 = 2 \cdot 23^2 = 1058.$$

A tetraéder egy lapjára a koszinusztételt alkalmazva:

(3) $$c^2 = a^2 + b^2 - ab.$$

Ezt így is írhatjuk:

$$(a-b)^2 = c^2 - ab,$$

amiből látható, hogy $c^2 \geq ab$. (2) és (3)-ból:

(4) $$ab + 2c^2 = 1058,$$

ezért a $c^2 \geq ab$ összefüggést figyelembe véve $3c^2 \geq 1058$, és így $c \geq 19$. De c kisebb, mint a körülírt gömb átmérője, ezért $19 \leq c < 23$. Azt is látjuk, hogy c nem lehet páros szám. Ha ugyanis c páros lenne, akkor (3)-ból az következne, hogy a is, b is páros. De ha mindhárom él páros, akkor (2)-ben a bal oldal osztható lenne 4-gyel, míg a jobb oldal csak 2-vel. Ezért c nem páros, és így csak $c = 19$ vagy $c = 21$ lehet. Szorozzuk a (4) egyenlet mindkét oldalát 3-mal és adjuk a kapott egyenletet (3)-hoz:

$$c^2 + 3 \cdot 1058 = a^2 + b^2 - ab + 3(ab + 2c^2), \text{ vagyis } 3174 - 5c = (a+b)^2.$$

Ez azt mutatja, hogy a $3174 - 5c^2$ szám teljes négyzet. Ez csak a $c = 19$ mellett teljesül, tehát $c = 19$. Utóbbi egyenletünkből $(a+b)^2 = 37^2$, tehát $a + b = 37$, (4)-ből pedig $a \cdot b = 336$. E két egyenletből $a = 16$; $b = 21$. A feladat egyetlen megoldása tehát

$$a = 16; \qquad b = 21; \qquad c = 19.$$

Erben Péter (Budapest, Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. Az egybevágó lapokkal határolt tetraédert – bizonyos egyezésekre támaszkodva –*egyenlő oldalú tetraéder*nek szokás nevezni.