A feladat megoldásához fölhasználjuk a következő segédtételt: Ha $a_1 \leq a_2 \leq a_3$ és $b_1 \leq b_2 \leq b_3$, akkor

$$(a_1 + a_2 + a_3)(b_1 + b_2 + b_3) \leq 3(a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3). \tag{1}$$

Ennek bizonyításához elegendő a következő négy helyes egyenlőtlenséget összeadni:

$$0 \leq (a_3 - a_2)(b_3 - b_2), \quad 0 \leq (a_3 - a_1)(b_3 - b_1), \quad 0 \leq (a_2 - a_1)(b_2 - b_1)$$

és

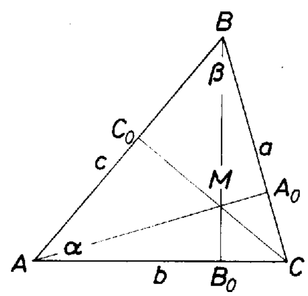
$$a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3 \leq a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3.$$

Jelöljük a háromszög A, B, C csúcsával szemközti oldalt rendre a, b, c-vel, a háromszög területét pedig t-vel. Az ismert $t = r \cdot s$ területképlet alapján a bizonyítandó állítást így írhatjuk:

$$A_0M + B_0M + C_0M \leq \frac{3t}{\frac{a+b+c}{2}},$$

amiből

$$(a + b + c)(A_0M + B_0M + C_0M) \leq 6t.$$



Az *ábra* alapján látható, hogy a háromszög kétszeres területe $2t = a \cdot A_0M + b \cdot B_0M + c \cdot C_0M$, ezért a bizonyítandó egyenlőtlenség ekvivalens a következővel:

$$(a + b + c)(A_0M + B_0M + C_0M) \leq 3(a \cdot A_0M + b \cdot B_0M + c \cdot C_0M). \tag{2}$$

Az oldalak jelölését megválaszthatjuk úgy, hogy $a \leq b \leq c$ legyen. Ekkor például az a oldallal szemközti α és a b oldallal szemközti β szögre $\alpha \leq \beta$, de így a C csúcsnál keletkező $A_0CM\sphericalangle = 90^\circ - \beta$ és $B_0CM\sphericalangle = 90^\circ - \alpha$ szögekre $A_0CM\sphericalangle \leq B_0CM\sphericalangle$. Tekintve, hogy az A_0CM és B_0CM derékszögű háromszögek átfogója közös, az előbbi reláció azt is jelenti, hogy $A_0M \leq B_0M$. Hasonlóan igaz, hogy $B_0M \leq C_0M$. Ezután a (2) egyenlőtlenséget (1) mintájára beláthatjuk, hiszen (2) ugyanolyan szerkezetű reláció, mint (1), és teljesülnek az $a \leq b \leq c$ és $A_0M \leq B_0M \leq C_0M$ feltételek.

Pór Attila (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., III. o. t.)