I. megoldás. Jelöljük a derékszögű háromszög átfogóját c-vel, egyik hegyesszögét α-val. Ekkor a kerület $c + c \cdot \sin\alpha + c \cdot \cos\alpha = 8$, és így

$$c = \frac{8}{1 + \sin\alpha + \cos\alpha} = \frac{8}{1 + \sin\alpha + \sin(90^\circ - \alpha)}.$$

A $\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{\alpha+\beta}{2} \cdot \cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ azonosság alapján:

$$c = \frac{8}{1 + 2 \cdot \sin 45^\circ \cdot \cos(\alpha - 45^\circ)},$$

amely alakból jól látható, hogy c pontosan akkor minimális a $0^\circ < \alpha < 90^\circ$ intervallumban, ha $\alpha = 45^\circ$. Tehát a 8 egység kerületű derékszögű háromszögek közül az egyenlő szárúnak legkisebb az átfogója.

II. megoldás. Legyen a derékszögű háromszög átfogója c, egyik befogója a, így a másik befogó $8 - a - c$. A Pitagorasz-tétel szerint $c^2 = a^2 + (8 - a - c)^2$, amelyből $c = \frac{a^2 - 8a + 32}{8 - a}$. Alakítsuk c-t a következőképpen:

$$c = \frac{(8-a)^2 + 8a - 32}{8 - a} = \frac{(8-a)^2 + 8(a-8) + 32}{8 - a} = 8 - a + \frac{32}{8-a} - 8.$$

Mivel $8 - a > 0$, a $8 - a + \frac{32}{8-a}$ összeget a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján becsülhetjük:

$$8 - a + \frac{32}{8-a} \geq 2 \cdot \sqrt{(8-a) \cdot \frac{32}{8-a}} = 2\sqrt{32}.$$

Ezért c pontosan akkor a legkisebb, ha $8 - a = \frac{32}{8-a}$, tehát ha $a = 8 - 4\sqrt{2}$. Ekkor $c = 8\sqrt{2} - 8$, és némi számolással adódik, hogy a másik befogó is $8 - 4\sqrt{2}$.

III. megoldás. A feladat következő általánosítását igazoljuk: Ha egy háromszög kerülete K és egyik szöge γ, akkor a γ-val szemközti c oldal pontosan akkor minimális, ha a másik két oldal egyenlő hosszúságú.

A szokásos jelöléseket és a szinusztételt alkalmazva:

$$K = \frac{c \cdot \sin\alpha}{\sin\gamma} + \frac{c \cdot \sin\beta}{\sin\gamma} + c, \quad \text{azaz} \quad K = \frac{c}{\sin\gamma}(\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma),$$

ahonnan

$$c = \frac{K \cdot \sin\gamma}{\sin\alpha + \sin\beta + \sin\gamma}.$$

Az I. megoldásban látottakhoz hasonlóan

$$\sin\alpha + \sin\beta = 2 \cdot \sin\frac{180^\circ - \gamma}{2} \cdot \cos\frac{\alpha - \beta}{2}.$$

Ezért, tekintve, hogy $\sin\frac{180^\circ - \gamma}{2} > 0$, c pontosan akkor minimális, amikor $\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$ maximális, tehát ha $\alpha = \beta$.

Bagyinszky Róbert (Békéscsaba, Széchenyi I. Közg. Szki., III. o. t.)