I. megoldás. a) Ismeretes, hogy a húrnégyszög területe

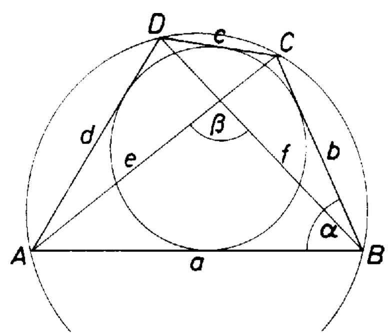
$$t=\sqrt{(s-a)(s-b)(s-c)(s-d)},$$

ahol $s=\dfrac{a+b+c+d}{2}$. (Ez a tétel megtalálható *Reiman István*: A geometria és határterületei c. könyvének 246. oldalán.) Mivel az adott négyszög érintőnégyszög is, $s=a+c=b+d$, azaz $s-a=c,\ s-b=d,\ s-c=a$ és $s-d=b$. Ezért $t=\sqrt{abcd}$.

b) Könnyű belátni, hogy az érintőnégyszög területe

$$t=\frac{a+b+c+d}{2}\cdot r,\ \text{és így}\ r=\frac{2t}{a+b+c+d},$$

$$r^2=\frac{4t^2}{(a+b+c+d)^2}=\frac{4abcd}{(a+b+c+d)^2}. \tag{1}$$



Az *ábra* ABC és ACD háromszögének területe legyen t_1, illetve t_2.. Ekkor ismert összefüggés szerint $R=\dfrac{abe}{4t_1}$ és $R=\dfrac{cde}{4t_2}$, aminek alapján
$Rt_1+Rt_2=Rt=\dfrac{abe+cde}{4}$, és ebből

$$R=\frac{e(ab+cd)}{4t}. \tag{2}$$

Hasonlóan kapjuk az f átló létrehozta két háromszögből:

$$R=\frac{f(ad+bc)}{4t}. \tag{3}$$

(2)és (3)-ból:

$$R^2=\frac{ef(ab+cd)(ad+bc)}{16t^2}. \tag{4}$$

Ptolemaiosz tétele szerint $ef=ac+bd$, és így az a) részben bizonyított területképletet is felhasználva (4) a következőképpen alakul:

$$R^2=\frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16abcd}. \tag{5}$$

Azt kell bizonyítanunk, hogy, $r\sqrt{2}\le R$ azaz $2r^2\le R^2$. Az (1) és (5) összefüggéseket felhasználva azt kell belátnunk, hogy

$$\frac{8abcd}{(a+b+c+d)^2}\le\frac{(ac+bd)(ab+cd)(ad+bc)}{16abcd},$$

amivel ekvivalens a következő:

$$(abcd)^2\le\frac{ac+bd}{2}\cdot\frac{ab+cd}{2}\cdot\frac{ad+bc}{2}\cdot\left(\frac{a+b+c+d}{4}\right)^2. \tag{6}$$

A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség alapján

(7)
$$\left.\begin{aligned} &\sqrt{abcd} \le \frac{ac+bd}{2}, \qquad \sqrt{abcd} \le \frac{ab+cd}{2},\\ &\sqrt{abcd} \le \frac{ad+bc}{2} \quad \text{és} \quad \sqrt[4]{abcd} \le \frac{a+b+c+d}{4}. \end{aligned}\right\}$$

Az utolsó egyenlőtlenséget négyzetre emelve és a (7)-ben szereplő egyenlőtlenségekkel összeszorozva a (6) egyenlőtlenség bizonyítását kapjuk, ami egyben a feladat b) állításának igazolása is.

Szalkai Ákos (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. a) Az *ábra* jelöléseit használva, a koszinusztétel szerint $e^2 = a^2 + b^2 - 2ab\cos\alpha$, illetve $e^2 = c^2 + d^2 - 2cd\cos(180^\circ - \alpha) = c^2 + d^2 + 2cd\cos\alpha$. E két összefüggésből

(1)
$$a^2 + b^2 - 2ab\cdot\cos\alpha = c^2 + d^2 + 2cd\cdot\cos\alpha.$$

Mivel a négyszög érintőnégyszög is, $a + c = b + d$, tehát $a - b = d - c$. Az utóbbi egyenlőséget négyzetre emelve

(2)
$$a^2 + b^2 - 2ab = c^2 + d^2 - 2cd.$$

(1) és (2)-ből: $2ab - 2ab\cdot\cos\alpha = 2cd\cdot\cos\alpha + 2cd$, amiből

(3)
$$\cos\alpha = \frac{ab - cd}{ab + cd}.$$

Mivel $0^\circ < \alpha < 180^\circ$, $\sin\alpha = \sqrt{1 - \cos^2\alpha}$, és így (3) alapján

(4)
$$\sin\alpha = \sqrt{1 - \frac{(ab-cd)^2}{(ab+cd)^2}} = \frac{\sqrt{4abcd}}{ab+cd}.$$

Fejezzük ki ezután a négyszög területét az ABC és ACD háromszögek területének összegeként:

$$t = \frac{ab\cdot\sin\alpha}{2} + \frac{cd\cdot\sin\alpha}{2} = \frac{ab+cd}{2}\cdot\frac{\sqrt{4abcd}}{ab+cd},$$

ahol közben felhasználtuk (4)-et. Ebből láthatjuk, hogy $t = \sqrt{abcd}$, amint azt bizonyítani kellett.

b) Ismeretes, hogy az érintőnégyszög területe $t = \dfrac{a+b+c+d}{2}\cdot r$, illetve az a) részben bizonyítottak szerint $t = \sqrt{abcd}$. A számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint $\sqrt[4]{abcd} \le \dfrac{a+b+c+d}{4}$, ezért a négyszög területének kétféle felírása alapján igaz a következő:

$$\frac{4\cdot\sqrt[4]{abcd}}{2}\cdot r \le \frac{a+b+c+d}{2}\cdot r = \sqrt{abcd},$$

amiből

$$2\cdot r\sqrt[4]{abcd} \le \sqrt{abcd},$$

azaz

(5)
$$4r^2 \le \sqrt{abcd} = t.$$

Jelöljük az átlók szögét β-val. Ekkor a négyszög területe $t = \dfrac{e\cdot f\cdot\sin\beta}{2}$, tehát $t \le \dfrac{e\cdot f}{2}$. Nyilvánvaló, hogy $2R \ge e$, illetve $2R \ge f$, ezért

(6)
$$t \le \frac{2R\cdot 2R}{2} = 2R^2.$$

Az (5) és (6) összefüggésekből $4r^2 \le 2R^2$, azaz $2r^2 \le R^2$, amint azt bizonyítani kellett.

Varga Emese (Kunszentmárton, József A. Gimn., III. o. t.)

III. megoldás. Csak a feladat b) részére adunk újabb megoldást. *N. Fuss*tól – aki *Euler* tanítványa volt – származik a következő tétel: Egy húr - és érintőnégyszög körülírt körének sugara R, beírt körének sugara r, a középpontok távolsága d. Ekkor fennáll a

$$2r^2(R^2 + d^2) = (R^2 - d^2)^2$$

összefüggés. Bizonyítása megtalálható *H. Dörrie*: A diadalmas matematika c. könyvének 208. oldalán (Gondolat Kiadó, 1965). Ebben az összefüggésben a d^2 tagot mindkét oldalon elhagyva a következő egyenlőtlenséget kapjuk: $2r^2R^2 \leq R^4$, amiből $2r^2 \leq R^2$.

Párniczky Benedek, (Budapest, Fazekas M. Gyak. Gimn., I. o. t.)

Megjegyzések.

1. A Fuss-féle tétel háromszögre vonatkozó megfelelőjét, $R^2 - d^2 = 2Rr$, már Euler közölte. Fuss megállapította az R, r és d közti összefüggést az öt-, hat-, hét- és nyolcszögre is.

2. Néhány megoldónk *Molnár Emil:* Matematikai Versenyfeladatok gyűjteménye c. könyvének (Tankönyvkiadó, 1974) 550. oldalán található tételre, Poncelet tételére építi a feladat b) részének megoldását. A könyv a tételt bizonyítás nélkül ismerteti. Itt nem volt szükség egy ilyen mély, a projektív geometria eszközeivel bizonyítható tétel fölhasználására.