

Írjuk fel a definíció alapján a sorozat első néhány elemét:

$$\begin{array}{llll} a_0 = 1; & a_1 = 11; & a_2 = 31; & a_3 = 61; \\ a_4 = 101; & a_5 = 101; & a_6 = 281; & a_7 = 281; \\ a_8 = 361; & a_9 = 451; & a_{10} = 451; & a_{11} = 451. \end{array}$$

Láthatjuk, hogy  $n = 0$ -ra és  $n = 1$ -re az állításban szereplő becslés éles,  $2 \leq n \leq 11$  esetén viszont nem.

Teljes induktióval bebizonyítjuk, hogy  $2 \leq n$  esetén  $a_n \leq 10^2$ .

Ebből  $2 \leq n \leq 11$ -re következik az állítás.

Állításunk  $2 \leq n \leq 11$  esetén, azaz az előbb felírt elemekre teljesül.

Tegyük fel, hogy  $N \geq 12$  olyan szám, hogy  $2 \leq n < N$  esetén  $a_n \leq 10n^2$  teljesül. Megmutatjuk, hogy akkor  $a_N \leq 10N^2$ , vagyis az állításunk  $n = N$  esetén is teljesül.

A sorozat definíciója szerint

$$a_N = 2a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 3a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} + 6a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor}.$$

Mivel  $N \geq 12$ , az  $\lfloor \frac{N}{2} \rfloor$ ,  $\lfloor \frac{N}{3} \rfloor$  és  $\lfloor \frac{N}{6} \rfloor$  számok 1-nél nagyobbak és  $N$ -nél kisebbek, így az indukciós feltevés alapján

$$a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} \leq 10 \left[ \frac{N}{2} \right]^2 \leq 10 \left( \frac{N}{2} \right)^2 = \frac{5}{2}N^2,$$

$$a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} \leq 10 \left[ \frac{N}{3} \right]^2 \leq 10 \left( \frac{N}{3} \right)^2 = \frac{10}{9}N^2,$$

$$a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor} \leq 10 \left[ \frac{N}{6} \right]^2 \leq 10 \left( \frac{N}{6} \right)^2 = \frac{5}{18}N^2.$$

Ezekből a becslésekből  $a_N$ -re azt kapjuk, hogy

$$a_N = 2a_{\lfloor \frac{N}{2} \rfloor} + 3a_{\lfloor \frac{N}{3} \rfloor} + 6a_{\lfloor \frac{N}{6} \rfloor} \leq 2 \cdot \frac{5}{2}N^2 + 3 \cdot \frac{10}{9}N^2 + 6 \cdot \frac{5}{18}N^2 = 10N^2.$$

Ezzel az állításunkat – és vele együtt a feladat állítását is – bebizonyítottuk.