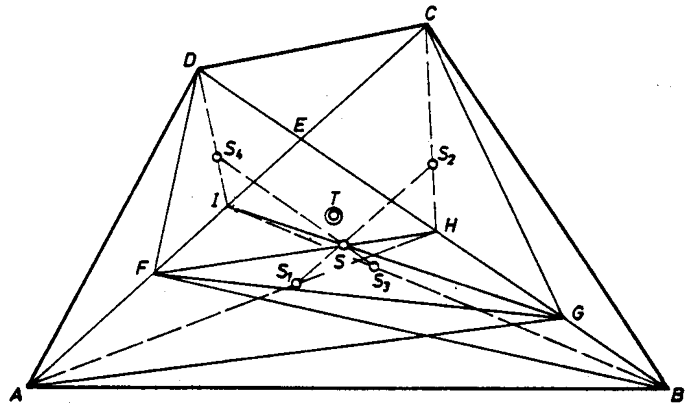
**I. megoldás**. Legyen az $EF$ szakasz felezőpontja $I$, $GE$ felezőpontja pedig $H$. Mivel $I$ az $AC$-nek is felezőpontja, az $EFG$ és $ACG$ háromszögek $S$ súlypontja közös.

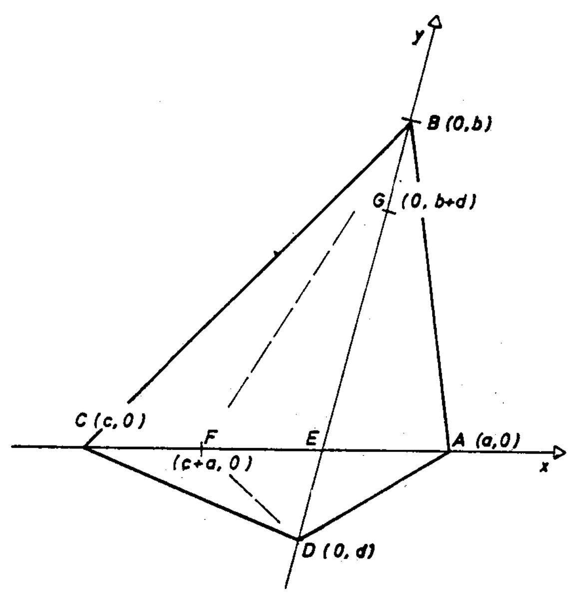



*1. ábra*

Az $S$ pont az $IG$ szakasz 1:2 arányú osztópontja. Az $EFG$ háromszög $HF$ súlyvonala is átmegy $S$-en, ezért $S$ a $HF$-et is 1:2 arányban osztja, s így súlypontja a $BDF$ háromszögnek is. Ezzel az első állítást bebizonyítottuk.

A négyszög súlypontja rajta van a $BDA$ háromszög $S_1$ és a $BDC$ háromszög $S_2$ súlypontját összekötő egyenesen. Mivel $S_1$ a $HA$ szakasz, $S_2$ pedig a $HC$ szakasz $H$-hoz közelebbi harmadoló pontja, $S$ pedig $HF$-en ugyanilyen arányú osztópont, ezért $S_1S_2$ átmegy $S$-en. Ugyanígy mutatható meg, hogy az $ABC$ és $ADC$ háromszögek súlypontját összekötő egyenes is átmegy $S$-en. Ezért $S$ a négyszögnek is súlypontja.

**II. megoldás.** Vegyünk fel egy – általában – ferdeszögű koordináta-rendszert a négyszög átlóira illeszkedő tengelyekkel (*2. ábra*).




*2. ábra*

Legyen az első tengely $AC$, $A$ és $C$ abszcisszája $a$, $c$, továbbá $B$, $D$ ordinátája $b$, $d$. Ebben a koordináta-rendszerben a súlypont koordinátáit ugyanúgy számítjuk ki, mint derékszögűben. Az $E$ pont koordinátái: (0; 0), az $F$ ponté: $(a+c\,;0)$, végül a $G$ ponté $(0;b+d)$. Ezért az $ACG$, a $BDF$ és az $EFG$ háromszögek súlypontjának koordinátái valóban egyezően:

$$\left(\frac{a+c}{3};\frac{b+d}{3}\right).$$

Az $ABD$, $BCD$, $ABC$ és $ACD$ háromszögek súlypontja rendre

$$S_1\left(\frac{a}{3};\frac{b+d}{3}\right), S_2\left(\frac{c}{3};\frac{b+d}{3}\right), S_3\left(\frac{a+c}{3};\frac{b}{3}\right), S_4\left(\frac{a+c}{3};\frac{d}{3}\right).$$

Látható, hogy $S_1S_2$ párhuzamos az $x$, $S_3S_4$ pedig az $y$ tengellyel. Ezért $S_1S_2$ és $S_3S_4$ metszéspontja $(a+c)/3;(b+d)/3$, tehát ez a négyszöglemez súlypontja.

*Olaszi Zsolt* (Székesfehérvár, Teleki Blanka Gimn., III. o. t.)

*Megjegyzés.* Vázoljuk a látottak mechanikai jelentését. Az $ABC$ homogén háromszöglemez $S$ súlypontja ugyanott van, mint az $A$, $B$ és $C$-be helyezett egységnyi tömegpontokból álló rendszerre ható súlyok (párhuzamos erők) eredőjének támadópontja. (Tetszőleges $O$ kezdőpontot véve az $(\overrightarrow{OA}+\overrightarrow{OB}+\overrightarrow{OC}):3=\overrightarrow{OS}$ vektor az utóbbit határozza meg.) Ha ugyanis az $AB$ oldal felezőpontja $F$, és a lemezt $AB$-vel „párhuzamosan" keskeny trapézokra, vékony pálcákra osztjuk, mindegyiknek a súlypontja a felezőpontjában lesz, az $FC$ szakaszra esik, az $AB$ oldalhoz tartozó súlyvonalra, stb. – Három tömegpont esetében az $A$-ra és $B$-re ható erők eredője 2-szer akkora, mint bármelyikükre külön, támadópontja $F$. Az $A$, $B$, $C$ rendszerre ható súlyok támadópontja pedig az $FC$ szakaszt 1:2 arányban osztja.

Ezekkel szemben homogén, konvex négyszöglemez és a csúcsaiba helyezett egységnyi tömegek esetében általában nincs meg a fenti egyezés, csak bizonyos „szabályos" esetekben. Az $\overrightarrow{AF}=\overrightarrow{EC}$ egyezés a *2. ábra* esetében azt jelenti, hogy $AC$-vel párhuzamos pálcákra bontással elvesszük a $BDA$ háromszöget és a vele egyenlő területű (és nyomatékú) konkáv $BCDF$ négyszöget. $S$ megkapható a maradék $BDF$ háromszögből. (A mechanikai értelmezés az olvasóra marad).

Négy tömegpont esetén az $A$, $B$, $C$ részrendszer súlypontja az *1. ábrán* $S_3$, itt 3-szor akkora eredő hat, mint $D$-ben, a teljes pontrendszer súlypontja az $S_3D$ szakasz 1:3 arányú negyedelő pontja. Ide esik az $S_1C$, $S_2A$ és $S_4B$ szakaszok negyedelő pontja is. (Az *1. ábrán* $T$.) Mit jelent ez koordinátákban?

Lényegesen más a probléma, ha az idom *kerületét* tekintjük mint homogén rudak együttesét. Ennek súlypontja általában már háromszög esetében sem esik egybe a lemez súlypontjával.

B.T.