I. megoldás. A feladat feltétele azt jelenti, hogy

$$\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma+\cos\delta=0, \tag{1}$$

ahol α, β, γ, δ a négyszög egymás utáni csúcsainál lévő szögek. Alkalmazzuk a $\cos\alpha+\cos\beta$ szorzattá alakítására vonatkozó azonosságot. Ekkor (1) így alakul:

$$2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}+2\cdot\cos\frac{\gamma+\delta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0.$$

Mivel $\gamma+\delta=360^\circ-(\alpha+\beta)$, azért

$$2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-2\cdot\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cdot\cos\frac{\gamma-\delta}{2}=0,$$

amiből

$$\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\left(\cos\frac{\alpha-\beta}{2}-\cos\frac{\gamma-\delta}{2}\right)=0.$$

Ez pontosan akkor teljesül ha,

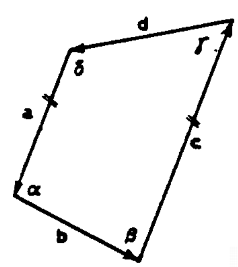
$$\text{vagy}\ \cos\frac{\alpha+\beta}{2}=0,\ \text{vagy}\ \cos\frac{\alpha-\beta}{2}=\cos\frac{\gamma-\delta}{2}.$$

Az első esetben $\alpha+\beta=180^\circ$ (mivel α, β konvex szögek, nincs egyéb lehetőség). Ekkor a négyszög trapéz. A második esetben $|\frac{\alpha-\beta}{2}|=|\frac{\gamma-\delta}{2}|$ következik. Ez azt jelenti, hogy $\alpha-\beta=\gamma-\delta$, vagy $\alpha-\beta=\delta-\gamma$, azaz $\alpha+\delta=\beta+\gamma$ vagy $\alpha+\gamma=\beta+\delta$. Itt az első eset ismét azt jelenti, hogy a négyszög trapéz, a második pedig azt, hogy húrnégyszög.

Cserháti Vencel (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

II. megoldás. Használjuk az *ábra* jelöléseit. Az (1)-ben szereplő koszinuszértékeket az oldalakra illeszkedő vektorok skaláris szorzatával fejezhetjük ki, pl.

$\vec a\cdot\vec b=a\cdot b\cdot\cos(180^\circ-\alpha)$, ahol a és b a megfelelő vektorok hossza.



Ezért $\cos\alpha=-\dfrac{\vec a\cdot\vec b}{a\cdot b}$. Ezután az (1) feltételt így írhatjuk:

$$\frac{\vec a\cdot\vec b}{a\cdot b}+\frac{\vec b\cdot\vec c}{b\cdot c}+\frac{\vec c\cdot\vec d}{c\cdot d}+\frac{\vec d\cdot\vec a}{d\cdot a}=0,$$

amiből

$$c\cdot d\cdot\vec a\cdot\vec b+a\cdot d\cdot\vec b\cdot\vec c+a\cdot b\cdot\vec c\cdot\vec d+b\cdot c\cdot\vec d\cdot\vec a=0.$$

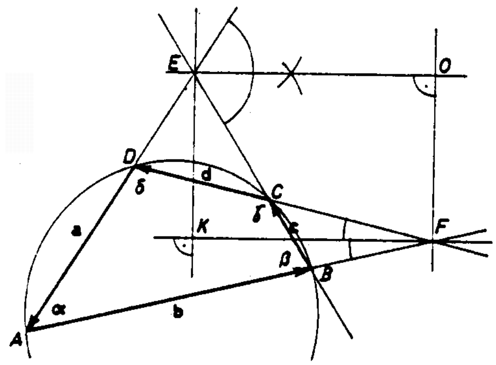
Ennek bal oldalát szorzattá alakíthatjuk:

$$(d\cdot\vec b+b\cdot\vec d)(c\cdot\vec a+a\cdot\vec c)=0.$$

Ez utóbbi kétféleképpen állhat fenn:

Az első eset az, hogy a bal oldal valamelyik tényezője zérusvektor, azaz $d\cdot\vec b+b\cdot\vec d=\vec 0$ vagy $\dfrac{a}{c}\left(\dfrac{\vec a}{a}+\dfrac{\vec c}{c}\right)=0$, $\dfrac{\vec a}{a}=-\dfrac{\vec c}{c}$. Ez csak úgy lehetséges, ha $\vec b\parallel\vec d$ vagy $\vec a\parallel\vec c$, amikor is a négyszög trapéz.

A második esetben $c\cdot\vec a+a\cdot\vec c$ merőleges $d\cdot\vec b+b\cdot\vec d$-re és feltehetjük, hogy az $ABCD$ négyszög nem trapéz, vagyis létezik a szemközti oldalpárok E és F metszéspontja.



Az $a\cdot\vec{c}$ és $c\cdot\vec{a}$ vektorok hossza egyenlő, így ezek összege az E pontnál keletkező egyik szög EO szögfelezőjével párhuzamos. Hasonlóan $d\cdot\vec{b}$ és $b\cdot\vec{d}$ összege az FO szögfelezővel párhuzamos. Ezért $EO\perp FO$, de akkor $EK\perp FK$ is fennáll, ahol EK és FK is szögfelezők. Könnyen láthatjuk, hogy $AEK\sphericalangle=(180^\circ-\alpha-\beta)/2$ és $AFK\sphericalangle=(180^\circ-\alpha-\delta)/2$. Az $AFKE$ négyszögben a belső szögek összege 360°, tehát

$$\frac{180^\circ-\alpha-\beta}{2}+\frac{180^\circ-\alpha-\delta}{2}+\alpha+270^\circ=360^\circ,$$

amiből $\beta+\delta=180^\circ$, a négyszög húrnégyszög.

Ratkó Éva (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján