Behelyettesítéssel ellenőrizhető, hogy $x_1 = 0$; $y_1 = -1$ és $x_2 = 2$; $y_2 = 1$ megoldások. Megmutatjuk, hogy más megoldás nincs.

Legyen $f(t) = t^2 + t$ és $g(t) = (2^{t+1} - 5)/3$. Azt kell megmutatnunk, hogy az $y = g(f(y))$ egyenletnek nem lehet három különböző megoldása.

Megállapíthatjuk, hogy f és g szigorúan konvex függvények. Valóban, f olyan másodfokú polinomfüggvény, amelynek a főegyütthatója pozitív, g pedig a szigorúan konvex $t \mapsto 2^t$ függvény eltoltjának pozitív konstansszorosa (az is igaz, hogy eltoltja, ugyanis $g(t) = 2^{t-(\log_2 3 - 1)} - \frac{5}{3}$. Nyilván teljesül továbbá, hogy g szigorúan monoton.

Ennek a három egyszerű tulajdonságnak a felhasználásával bebizonyítjuk, hogy az $y \mapsto g(f(y))$ függvény is szigorúan konvex. Azt kell ehhez igazolnunk, hogy ha $0 < \lambda < 1$, $a < b$ valós számok, akkor

$$g(f(\lambda a + (1-\lambda)b)) < \lambda g(f(a)) + (1-\lambda) g(f(b)).$$

Mivel f szigorúan konvex,

$$f(\lambda a + (1-\lambda)b) < \lambda f(a) + (1-\lambda) f(b).$$

Ebből g szigorú monotonitása miatt

$$g(f(\lambda a + (1-\lambda)b)) < g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)).$$

Felhasználva g szigorú konvexitását is:

$$g(f(\lambda a + (1-\lambda)b)) < g(\lambda f(a) + (1-\lambda) f(b)) < \lambda g(f(a)) + (1-\lambda) g(f(b)).$$

Tehát az $y \mapsto g(f(y))$ függvény valóban szigorúan konvex.

Tegyük most fel, hogy az $y = g(f(y))$ egyenletnek legalább három különböző megoldása van; legyen $a < b < c$ három megoldás. Látható, hogy $\lambda = \dfrac{b-c}{a-c}$ az a szám, amelyre $b = \lambda \cdot a + (1-\lambda)c$. Ekkor, mivel a, b, c megoldások és $y \mapsto g(f(y))$ szigorúan konvex,

$$b = g(f(b)) = g(f(\lambda \cdot a + (1-\lambda)c)) < \lambda \cdot g(f(a)) + (1-\lambda) g(f(c)) = \lambda a + (1-\lambda)c = b,$$

ami ellentmondás.

Az egyenletrendszernek tehát legfeljebb két megoldása lehet. Mivel pedig két megoldást már találtunk, más megoldás nincs.