Először megmutatjuk, hogy x, y és z abszolút értéke nem lehet 1-nél nagyobb. Tegyük fel, hogy állításunkkal ellentétben például $|x| > 1$. Mivel az első egyenlet alapján x nem lehet (-1)-nél kisebb, ez (valós számokkal) csak úgy lehetséges, ha$x > 1$. Ekkor a harmadik egyenlet alapján

$$z = 2x^2 - 1 = x^2 + (x^2 - 1) > x > 1,$$

így a második egyenlet alapján

$$y = 2z^2 - 1 > z,$$

ezért az első egyenletből

$$x = 2y^2 - 1 > y.$$

Az $x > 1$ feltevésből kapott három egyenlőtlenség:

$$x < z < y < x,$$

ami ellentmondás.

A betűzés ciklikus cseréjével hasonlóan bizonyítható, hogy y és z sem lehet 1-nél nagyobb abszolút értékű.

Legyen t olyan 0 és π közé eső valós szám, amelyre $x = \cos t$. Mivel $|x| \leqq 1$, pontosan egy ilyen t létezik. Ekkor a harmadik egyenlet alapján

$$z = 2x^2 - 1 = 2\cos^2 t - 1 = \cos 2t,$$

a második egyenlet szerint pedig

$$y = 2z^2 - 1 = 2\cos^2 2t - 1 = \cos 4t.$$

A kapott eredményeket behelyettesítve az első egyenletbe:

$$\cos t = x = 2y^2 - 1 = 2\cos^2 4t - 1 = \cos 8t,$$

vagyis

$$\cos t = \cos 8t.$$

Mivel tetszőleges u és v valós számokra $\cos u = \cos v$ pontosan akkor teljesül, ha $u - v$ vagy $u + v$ a 2π-nek egész számú többszöröse, ez azt jelenti, hogy $7t$ vagy $9t$ a 2π-nek egész számú többszöröse. Ilyen t érték a $[0, \pi]$ intervallumban nyolc van:

$$t_1 = 0;\quad t_2 = \frac{2\pi}{7};\quad t_3 = \frac{4\pi}{7};\quad t_4 = \frac{6\pi}{7};\quad t_5 = \frac{2\pi}{9};\quad t_6 = \frac{4\pi}{9};\quad t_7 = \frac{6\pi}{9};\quad t_8 = \frac{8\pi}{9}.$$

Az ezekhez tartozó megoldások:

$$\begin{array}{lll}
x_1 = \cos 0 = 1; & y_1 = \cos 0 = 1; & z_1 = \cos 0 = 1; \\
x_2 = \cos\frac{2\pi}{7}; & y_2 = \cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}; & z_2 = \cos\frac{4\pi}{7}; \\
x_3 = \cos\frac{4\pi}{7}; & y_3 = \cos\frac{16\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}; & z_3 = \cos\frac{8\pi}{7} = \cos\frac{6\pi}{7}; \\
x_4 = \cos\frac{6\pi}{7}; & y_4 = \cos\frac{24\pi}{7} = \cos\frac{4\pi}{7}; & z_4 = \cos\frac{12\pi}{7} = \cos\frac{2\pi}{7}; \\
x_5 = \cos\frac{2\pi}{9}; & y_5 = \cos\frac{8\pi}{9}; & z_5 = \cos\frac{4\pi}{9}; \\
x_6 = \cos\frac{4\pi}{9}; & y_6 = \cos\frac{16\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9}; & z_6 = \cos\frac{8\pi}{9}; \\
x_7 = \cos\frac{6\pi}{9} = -\frac{1}{2}; & y_7 = \cos\frac{24\pi}{9} = -\frac{1}{2}; & z_7 = \cos\frac{12\pi}{9} = -\frac{1}{2}; \\
x_8 = \cos\frac{8\pi}{9}; & y_8 = \cos\frac{32\pi}{9} = \cos\frac{4\pi}{9}; & z_8 = \cos\frac{16\pi}{9} = \cos\frac{2\pi}{9}.
\end{array}$$