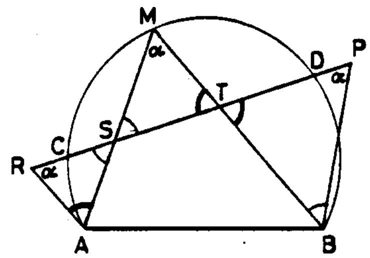
I. megoldás. Szerkesszük meg a CD egyenesen azt az R és P pontot, amelyre $ARP\sphericalangle = BPR\sphericalangle = \alpha$, ahol α az a szög, amelyben M-ből az AB szakasz látszik.



1. ábra

Az *1. ábrán* egy és két ívvel jelölt csúcsszögek egyenlősége folytán az RAS és a PTB háromszögek hasonlóak. Ezért $RS : AR = PB : TP$, amiből $RS \cdot TP = AR \cdot PB$.

A számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint:

$$\frac{RS+TP}{2} \geqq \sqrt{RS \cdot TP} = \sqrt{AR \cdot PB}, \tag{1}$$

és itt $AR \cdot PB$ állandó. (1)-ben egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $RS = TP = \sqrt{AR \cdot PB}$. Ezután az ST szakaszt így becsülhetjük:

$$ST = RP - (RS + TP) \leqq RP - 2\sqrt{AR \cdot PB},$$

tehát ST maximuma: $RP - 2\sqrt{AR \cdot PB}$, és ezt akkor kapjuk, ha $RS = TP = \sqrt{AR \cdot PB}$.

A $\sqrt{AR \cdot PB}$ szakasz megszerkeszthető. Ezt PR-re az R és P felől felmérve kapjuk az S' és T' pontokat, amelyekre $S'T'$ maximális. Meg kell még mutatnunk, hogy ezekhez a pontokhoz létezik a köríven megfelelő M pont. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy $\sqrt{AR \cdot PB} \leqq RP/2$. Legyen ugyanis M a CD ív egy tetszőleges pontja, és a hozzá tartozó metszéspontok S és T. Ekkor

$$\sqrt{AR \cdot PB} = \sqrt{RS \cdot TP} \leqq \sqrt{RS \cdot SP} \leqq \frac{RS+SP}{2} = \frac{RP}{2}.$$

Ebből következik, hogy az RP szakaszon az előbb megszerkesztett S' és T' pontok sorrendje a következő: R, S', T', P. Tekintsük ezután az ARS' és $T'PB$ háromszögeket. Ezek oldalaira:

$$\frac{AR}{RS'} = \frac{AR}{\sqrt{AR \cdot PB}} = \sqrt{\frac{AR}{PB}}, \qquad \text{illetve} \qquad \frac{T'P}{PB} = \frac{\sqrt{AR \cdot PB}}{PB} = \sqrt{\frac{AR}{PB}},$$

tehát két oldalpárjuk aránya megegyezik és a közbezárt α szög is egyenlő. Ezért e két háromszög hasonló, s így szögeik megegyeznek. Az S'-nél és T'-nél lévő csúcsszögeket figyelembe véve az AS' és BT' egyenesek metszik egymást egy M' pontban és a $T'M'S'$ háromszög is hasonló az előző kettőhöz. De akkor az M' csúcsánál lévő szög α, tehát M' rajta van a köríven.

Papolczy Péter (Bp., Berzsenyi D. Gimn., IV. o. t.)

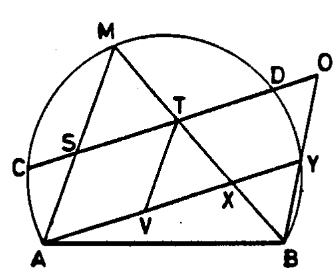
II. megoldás. Legyen először $CA = BD$, ekkor $CD \parallel AB$. Az M pont távolsága a CD egyenestől legyen x, AB és CD, távolsága pedig d.

Az MST és MAB háromszögek hasonlósága miatt

$$\frac{ST}{AB} = \frac{x}{x+d} = \frac{1}{1+\frac{d}{x}},$$

amelyből látjuk, hogy ST akkor maximális, ha x is az, és ebben az esetben M a CD ív felezőpontja.

Az általános esetre térve feltehetjük, hogy $CA < BD$.



2. ábra

Húzzunk párhuzamost A-n keresztül CD-vel. Messe ez MB-t X-ben, a körívet pedig Y-ban (*2. ábra*). Az AM-mel T-n át húzott párhuzamos messe AY-t a V pontban.

Nyilvánvaló, hogy $AV+VY$ állandó, továbbá az $ASTV$ paralelogrammából $ST=AV$. Ezért ST akkor lesz maximális, ha VY minimális. Könnyen látható, hogy $VTB\sphericalangle = VYB\sphericalangle$, hiszen a bal oldalon lévő szög egyállású az AMB szöggel, a jobb oldali pedig egy íven nyugvó kerületi szög ugyanezzel. Ezért a B, Y, V, T pontok egy körön vannak. Keresnünk kell egy olyan kört, amely átmegy a B és Y pontokon, van közös pontja CD-vel, és az AY húrt egy Y-tól különböző V pontban metszi, úgy, hogy a VY szakasz hossza minimális. Ha egy ilyen kör sugarát növeljük, VY növekszik. Ezért VY akkor lesz a legkisebb, ha a kör érinti a CD szakaszt.

Jelöljük a keresett érintési pontot T_1-gyel. Legyen a BY és a CD egyenesek metszéspontja O. Az O pont biztosan létrejön, hiszen BY és CD nem párhuzamosak. A körérintő és szelődarabok összefüggése alapján $OT_1^2=OY\cdot OB$, ahonnan OT_1 megszerkeszthető. Az OT_1 szakaszt O-ból CD egyenesre mérve (D felé) kapjuk a T_1 pontot, majd CD-re T_1-ben merőlegest állítva és ezt BY felező merőlegesével elmetszve a keresett kör középpontját. A kör és AY metszéspontja a V_1 pont, az $AV_1=S_1T_1$ összefüggés alapján pedig S_1 is megszerkeszthető. Az elmondottakból következik, hogy az így szerkesztett S_1T_1 valóban maximális.

Meg kell még mutatnunk, hogy az AS_1 és a BT_1 egyenesek M_1 metszéspontja az adott köríven van. Mivel B, Y, T_1, V_1 egy körön helyezkednek el, $BYV_1\sphericalangle = V_1T_1B\sphericalangle$; továbbá AS_1 párhuzamos VT_1-gyel, így $AM_1T_1\sphericalangle = V_1T_1B\sphericalangle$. De akkor $AM_1T_1\sphericalangle = BYV_1\sphericalangle$, tehát M_1-ből AB ugyanakkora szögben látszik, mint az Y pontból, ezért M_1 rajta van a köríven.

Kovács Flórián (Bp. Árpád Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján