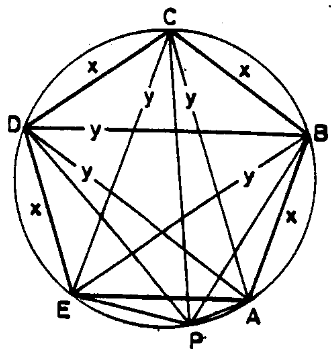
I. megoldás. Ptolemaiosz tétele szerint bármely konvex húrnégyszög átlóinak szorzata egyenlő a szemközti oldalpárok szorzatainak összegével. Alkalmazzuk a tételt a $PABC, PBCE$ és $PBCD$ húrnégyszögekre.



Az *ábra* jelöléseit is használva:

$$PA \cdot x + PC \cdot x = PB \cdot y,$$
$$PE \cdot x + PB \cdot y = PC \cdot y,$$
$$PB \cdot x + PD \cdot x = PC \cdot y.$$

A három egyenletet összeadva, majd mindkét oldalból $(PB + PC) \cdot y$ -t levonva:

$$PA \cdot x + PC \cdot x + PE \cdot x = PB \cdot x + PD \cdot x,$$

és ezt x-szel osztva a feladat állítását kapjuk.

II. megoldás. A feladat állításánál valamivel általánosabban azt fogjuk megmutatni, hogy a $2n+1$-oldalú $P_0P_1 \cdots P_{2n}$ szabályos sokszög $\widehat{P_0P_{2n}}$ ívén lévő P pontra

(1) $$PP_0 + PP_2 + \cdots + PP_{2n} = PP_1 + PP_3 + \cdots + PP_{2n-1}.$$

Ez $n = 2$ esetben a feladat állítása.

Ismeretes, hogy az r sugarú körben a 2α középponti szöghöz tartozó húr hossza $2r \cdot \sin\alpha$. Legyen a szabályos sokszög középpontja O és $POP_0\sphericalangle = 2\varphi$. Ekkor az (1)-ben szereplő szakaszokat az említett módon felírva, majd $2r$-rel osztva a következőt kapjuk:

$$\sin\varphi + \sin\left(\frac{2 \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) + \cdots + \sin\left(\frac{2n \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) + \sin\left(\frac{3 \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) + \cdots + \sin\left(\frac{(2n-1) \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right).$$

Vonjuk ki mindkét oldalból a jobb oldalt, és csoportosítsunk úgy, hogy a $\sin\varphi$ tagon kívül a következő párok különbsége szerepeljen:

a bal oldal második tagjának és a jobb oldal utolsó tagjának különbsége, a bal oldal harmadik és a jobb oldal utolsó előtti tagjának különbsége s í.t. Ekkor a bal oldalon a $\sin\varphi$ tagon kívül

$$\sin\left(\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) - \sin\left(\frac{2(n-i)+1}{2n+1} \cdot 180^\circ + \varphi\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) - \sin\left(180^\circ - \frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} - \varphi\right) =$$
$$= \sin\left(\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} + \varphi\right) - \sin\left(\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} - \varphi\right)$$

alakú kifejezések lesznek. Ezeket a $\sin(\alpha + \varphi) - \sin(\alpha - \varphi) = 2 \cdot \cos\alpha \sin\varphi$ azonosság segítségével átalakítva azt kell megmutatnunk, hogy

(2) $$\sin\varphi + \left(2 \cdot \cos\frac{2 \cdot 180^\circ}{2n+1} + 2 \cdot \cos\frac{4 \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cdots + 2 \cdot \cos\frac{2n \cdot 180^\circ}{2n+1}\right) \cdot \sin\varphi = 0.$$

Ha $P \equiv P_0$, azaz $\sin\varphi = 0$, akkor (2) teljesül. Ha $\sin\varphi \neq 0$, akkor $\sin\varphi$-vel osztva, majd a

$$2 \cdot \cos\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} = \cos\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\left(2 \cdot 180^\circ - \frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1}\right) =$$
$$= \cos\frac{2i \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\frac{2(2n-i+1)180^\circ}{2n+1}$$

átalakítást alkalmazva az

$$1 + \cos\frac{2 \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\frac{4n \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\frac{4 \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\frac{(4n-2) \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cdot\cdot$$
$$\cdots + \cos\frac{2n \cdot 180^\circ}{2n+1} + \cos\frac{(2n+2) \cdot 180^\circ}{2n+1} = 0$$

egyenlőséghez jutunk. Ezt rendezve, és $\cos 0^\circ = 1$-et írva végül azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\cos 0^\circ + \cos\frac{360^\circ}{2n+1} + \cos 2 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1} + \cos 3 \cdot \frac{360^\circ}{2n+1} + \cdots + \cos 2n \cdot \frac{360^\circ}{2n+1} = 0. \tag{3}$$

Tekintsük ehhez azt a $2n+1$-oldalú szabályos sokszöget, amelynek középpontja az origó, egyik csúcsa pedig az $(1; 0)$ pont. Tudjuk, hogy a szabályos sokszög középpontjából a csúcsokba mutató vektorok összege a zérusvektor. A (3)-ban szereplő összeg ennek a nullvektornak az x koordinátája, tehát zérus. Mivel pedig (3) ekvivalens (1)-gyel, így azt is igazoltuk.

Kovács Flórián (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A (2) bal oldalán a zárójelben lévő összeg kiszámítható az

$$\frac{1}{2} + \cos x + \cos 2x + \cdots + \cos nx = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}x}{2 \cdot \sin\frac{x}{2}}$$

azonosság alapján is. (Igazolása megtalálható *Bogdán Z.: Matematika feladatok – ötletek – megoldások II.* c. könyvben.)