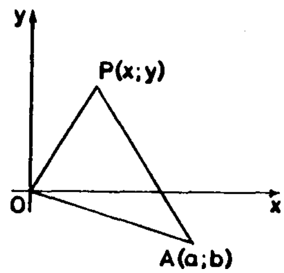
I. megoldás.

Az *1. ábrán* látható (esetleg elfajuló) háromszögre

(1) $$OP + PA \geqq OA.$$



1. ábra

Az itt szereplő távolságokat kifejezve (1) így alakul:

(2) $$\sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} \geqq \sqrt{a^2+b^2}.$$

Mivel x és y nemnegatív számok, ezért

(3) $$x + y = \sqrt{x^2+2xy+y^2} \geqq \sqrt{x^2+y^2},$$

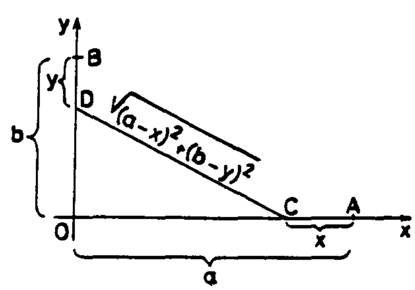
így (2) és (3) alapján

$$z = x + y + \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2} \geqq \sqrt{x^2+y^2} + \sqrt{(a-x)^2+(b-x)^2} \geqq \sqrt{a^2+b^2}.$$

Tehát z minimuma $\sqrt{a^2+b^2}$, amit nemnegatív x és y esetén az $x = y = 0$ helyen vesz fel.

Németh Sándor (Győr, Révai M. Gimn. IV. o. t.)

II. megoldás.



2. ábra

A *2. ábra* jelöléseivel

$$\begin{gathered} z = AC + CD + DB = \\ = x + y + \sqrt{(a-x)^2+(b-y)^2}, \end{gathered}$$

z tehát az $ACDB$ töröttvonal hosszúsága. Ez nyilván akkor a legkisebb, ha a vonal egyenes szakasz, vagyis

$$z = AB = \sqrt{a^2+b^2}.$$

Ez nemnegatív x és y esetében pontosan akkor következik be, ha $x = 0$ és $y = 0$.

Megjegyzés: Mindkét megoldásban erősen kihasználtuk, hogy x és y nem negatív, hiszen pl. a II.-ban x is, y is szakasz hosszaként szerepelt. A feladat bizonyítása általánosítható a síkról a térre, vagy akár az n-dimenziós térre, így érvényes a következő:

Ha $a_1, a_2, \cdots, a_n$ adott valós számok, $x_1, x_2, \cdots, x_n$ pedig tetszőleges nemnegatív számok, akkor a

$$z = x_1 + x_2 + \cdots + x_n + \sqrt{(a_1-x_1)^2+(a_2-x_2)^2+\cdots+(a_n-x_n)^2}$$

kifejezés minimuma $\sqrt{a_1^2+a_2^2+\cdots+a_n^2}$.