Legyenek $1 = a_1 \leqq a_2 \leqq \ldots \leqq a_n$ pozitív egészek. Megadunk egy szükséges és elégséges feltételt arra, hogy minden a_n-nél nem nagyobb egész szám előállítható legyen e számok közül néhány (esetleg csak egy) összegeként. Ezután megmutatjuk, hogy a 2000 pozitív osztóira teljesül ez a feltétel.

A feltétel a következő: minden $1 \leqq k < n$-re $a_{k+1} \leqq 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$. Ez a feltétel szükséges, mert ha $a_{k+1} > 1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k$, akkor nem tudjuk előállítani $(1 + a_1 + a_2 + \ldots + a_k)$-t $a_i - k$ összegeként, hiszen $a_{k+1}, \ldots, a_n$ ennél a számnál nagyobb, így nem szerepelhetnek a tagok között, viszont a legnagyobb szám, amit a többi a_i-vel – $a_1, a_2, \ldots, a_k$-val – elő lehet állítani, kisebb $(1 + a_1 + \ldots + a_k)$-nál.

Ezután n szerinti teljes indukcióval bebizonyítjuk, hogy ha a feltétel teljesül, akkor minden $(a_1 + a_2 + \ldots + a_n)$-nél nem nagyobb pozitív egész előállítható néhány a_i összegeként. Ez $n = 1$-re igaz: az egyetlen, a_1-nél nem nagyobb pozitív egész az 1, és $a_1 = 1$.

Tegyük fel, hogy $n \geqq 2$, és minden $(a_1 + a_2 + \ldots + a_{n-1})$-nél nem nagyobb pozitív egész szám előáll $a_1, \ldots, a_{n-1}$ közül néhánynak az összegeként. Megmutatjuk, hogy ekkor a_n-et is felhasználva az $(a_1 + \ldots + a_{n-1}) + 1$ és $(a_1 + \ldots + a_n)$ közötti számok is előállíthatók ilyen módon. Legyen $(a_1 + \ldots + a_{n-1}) + 1 \leqq b \leqq a_1 + \ldots + a_n$. Azt akarjuk belátni, hogy b előállítható a_n és néhány a_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ összegeként. Ha $b = a_n$, akkor ez nyilvánvaló, így feltehető, hogy $b \neq a_n$, Az $a_n \leqq a_1 + \ldots + a_{n-1} + 1 \leqq b$ a feltétel szerint, tehát $b > a_n$. Az indukciós feltevés értelmében $b - a_n (> 0)$ előállítható néhány a_i $(1 \leqq i \leqq n-1)$ összegeként. Ehhez az összeghez a_n-et hozzáadva éppen b előállításához jutunk. Ezzel a feltétel elégségességét is igazoltuk.

Mutatunk most egy erősebb (elégséges, de nem szükséges) feltételt és ezt fogjuk alkalmazni 2000 osztóira.

Tegyük fel, hogy minden $1 \leqq k < n$-re $a_{k+1} \leqq 2a_k$, azaz számaink mindegyike legfeljebb az előző kétszerese.Ekkor teljesül a fönt bizonyított feltétel is, tehát hogy minden $1 \leqq k < n$-re $a_{k+1} \leqq 1 + a_1 + \ldots + a_k$.

Állításunkat ismét indukcióval bizonyítjuk.

$$k = 1\text{-re} \quad a_2 \leqq 2a_1 = a_1 + 1.$$

Tegyük fel, hogy $a_{k+1} \leqq (a_1 + \ldots + a_k) + 1$. Ekkor

$$a_{k+2} \leqq 2a_{k+1} = a_{k+1} + a_{k+1} \leqq a_{k+1} + (a_1 + a_2 + \ldots + a_k + 1) = (a_1 + a_2 + \ldots + a_{k+1}) + 1.$$

Végül a 2000 osztói nagyság szerint:

$$1, 2, 4, 5, 8, 10, 16, 20, 25, 40, 50, 80, 100, 125, 200, 250, 400, 500, 1000, 2000,$$

és ezekre láthatóan teljesül, hogy mindegyikük legfeljebb az előző kétszerese.

Lente Gábor(Eger, Gárdonyi G. Gimn., III. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A közölt bizonyítás segítségével általában az is belátható, hogy ha az n természetes szám $2^a \cdot 5^b$ alakú, ahol $a \geqq 2$, akkor minden, az n-nél nem nagyobb pozitív egész előállítható az n néhány osztójának összegeként. Ehhez elegendő, hogy az n szám $1 = d_1 < d_2 < \ldots < d_s = n$ osztóira $d_{i+1} \leqq 2d_i$ teljesüljön $(i = 1, 2, \ldots, s-1)$. Tekintsünk evégből egy d_i osztót $(d_i < n)$. Ha $2d_i | n$, akkor $d_{i+1} \leqq 2d_i$. Ha $2d_i$ nem osztója n-nek, akkor $d_i = 2^a \cdot 5^v$, ahol $v < b$; ekkor viszont $d' = 2^{a-2} \cdot 5^{v+1}$ osztja n-et, és $d_i < \frac{5}{4} d_i = d'$ miatt $d_{i+1} \leqq \frac{5}{4} d_i < 2d_i$.