Vonjuk ki mindkét oldalt 1990 -ből; ekkor a bizonyítandó egyenlőség a következő alakot ölti:

$$\frac{1990}{1}-\frac{1989}{2}+\frac{1988}{3}+\ldots+\frac{2}{1989}-\frac{1}{1990}=$$
$$=\left(2-\frac{1}{996}\right)+\left(2-\frac{3}{997}\right)+\ldots+\left(2-\frac{1989}{1990}\right).$$

Jelölje a bal oldalt A, a jobb oldalt B:

$$B=\frac{1991}{996}+\frac{1991}{997}+\ldots+\frac{1991}{1990}=1991\left(\frac{1}{996}+\ldots+\frac{1}{1990}\right).$$

A bal oldalt úgy alakítjuk át, hogy a negatív előjelű tagokat pozitív jellel írjuk fel, majd a kétszer levonjuk.

$$A=\frac{1990}{1}+\frac{1989}{2}+\ldots+\frac{1}{1990}-2\left(\frac{1989}{2}+\frac{1987}{4}+\ldots+\frac{1}{1990}\right)=$$
$$=\left(\frac{1991}{1}-1\right)+\left(\frac{1991}{2}-1\right)+\ldots+\left(\frac{1991}{1990}-1\right)-$$
$$-2\left(\left(\frac{1991}{2}-1\right)+\left(\frac{1991}{4}-1\right)+\ldots+\left(\frac{1991}{1990}-1\right)\right)=$$
$$=\left(1991\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1990}\right)-1990\right)-2\left(1991\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\ldots+\frac{1}{1990}\right)-995\right)=$$
$$=1991\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{1990}\right)-1991\left(\frac{1}{1}+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{995}\right)=$$
$$=1991\left(\frac{1}{996}+\frac{1}{997}+\ldots+\frac{1}{1990}\right).$$

Megmutattuk, hogy $A=B$, így igazoltuk a bizonyítandó állítást.

Varjú Katalin (III. o. t.) megoldása alapján

Megjegyzés. Az alábbi okoskodás rámutat a feladat hátterére: tetszőleges pozitív n-re legyen

$$f_n(x)=x-\frac{x-(2n-1)}{2}+\frac{x-(2n-2)}{3}-\ldots+-\ldots-\frac{x-1}{2n}\qquad\text{és}$$
$$g_n(x)=\frac{x+1}{n+1}+\frac{x+3}{n+2}+\ldots+\frac{x+2n-1}{2n}.$$

A két polinom legfeljebb elsőfokú, $f_n(x)$ főegyütthatója

$$a_n=1-\frac{1}{2}+\frac{1}{3}-\ldots+-\ldots+\frac{1}{2n-1}-\frac{1}{2n},$$

$g_n(x)$ főegyütthatója pedig

$$b_n=\frac{1}{n+1}+\frac{1}{n+2}+\ldots+\frac{1}{2n}.$$

Ismeretes, hogy $a_n=b_n$ minden pozitív n-re. (A bizonyítás éppen a megoldásban bemutatott átalakítással végezhető.) Vegyük észre másfelől,hogy

$$f_n(2n+1)=(2n+1)-1+1-+\ldots-1=2n,\quad\text{továbbá}$$
$$g_n(2n+1)=\frac{2n+2}{n+1}+\frac{2n+4}{n+2}+\ldots+\frac{4n}{2n}=2n\quad\text{ugyancsak.}$$

Az elsőfokú f_n és g_n polinomok főegyütthatói és a $(2n+1)$-helyen fölvett értékeik egyenlők. A két polinom tehát *azonosan egyenlő,* így a 0 helyen is egyenlő értékeket vesznek föl:

$$f_n(0)=\frac{2n-1}{2}-\frac{2n-2}{3}+-\ldots+\frac{1}{2n}=\frac{1}{n+1}+\frac{3}{n+2}+\ldots+\frac{2n-1}{2n}=g_n(0);$$

ez pedig éppen a bizonyítandó egyenlőség, ha $n=995$.