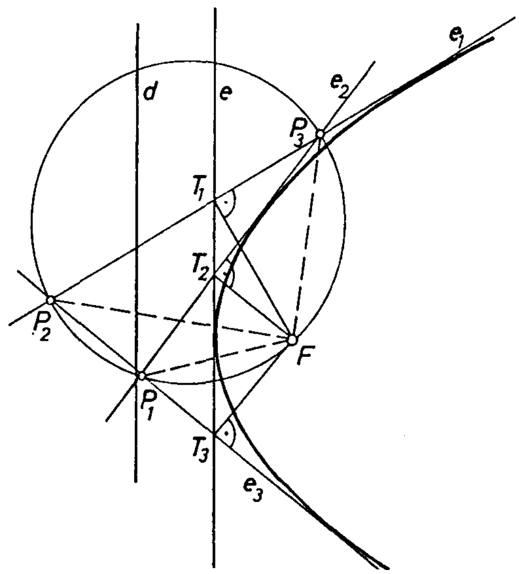
Ismeretes, hogy a parabola fókuszából egy érintőjére állított merőleges talppontja a csúcsérintőn van. Ábránkon F a parabola fókusza, d a vezéregyenes, e a csúcsérintő, e_1 e_2, e_3 pedig három érintő, amelyek P_1, P_2, P_3 pontokban metszik egymást. A fókuszból az érintőkre bocsátott merőlegesek talppontja T_1, T_2, T_3, amelyek az említett tétel szerint a csúcsérintőkre illeszkednek. Bebizonyítjuk, hogy a parabola három érintője által meghatározott háromszög körülírt köre átmegy az F ponton.



Thalesz tétele szerint T_1 és T_2 rajta van az FP_3 átmérőjű körön, ezért az FT_1T_2 és FP_3T_2 szögek egyenlők. Hasonlóan FP_2 Thalesz-köre tartalmazza a T_1 és T_3 pontokat, ezért $FT_1T_3\sphericalangle = FP_2T_3\sphericalangle$. Így $FT_1T_2\sphericalangle = FT_1T_3\sphericalangle$, ezért $FP_3T_2\sphericalangle = FP_2T_3\sphericalangle$. A két utóbbi szög az a két szög, amelyben P_3-ból, illetve P_2-ből az FP_1 szakasz látszik. Ezért az F, P_1, P_2, P_3 pontok egy körön helyezkednek el. Ábránk betűzése ugyanis olyan, hogy T_3 fölött van T_2, afölött pedig T_1, így P_2 és P_3 az FP_1 egyenesnek ugyanabban a félsíkjában van.

Vegyünk ezután a négy érintőből hármat-hármat. Mivel az érintők között párhuzamosak nem lehetnek, három érintő egy háromszöget határoz meg. A két érintőhármas által meghatározott két háromszög köré írt köre az előbbiek szerint átmegy a parabola fókuszán, ezért egyik közös pontjuk a fókusz. A másik közös pont nyilván valamelyik két érintő metszéspontja, ezért a négy érintő által meghatározott négy lehetséges háromszög köré írt köröknek (sőt már háromnak is) egyetlen közös pontja lesz, a parabola fókusza. Ebből a közös pontból állítsunk merőlegest két érintőre. Ezeknek a merőlegeseknek a talppontja meghatározza a csúcsérintőt. Húzzunk merőlegest az ötödik érintő megadott irányára. Ennek a merőlegesnek és a csúcsérintőnek a közös pontja az ötödik érintőnek is pontja. Ezen a ponton át az ötödik érintő irányával párhuzamost húzva kapjuk az ötödik érintőt.

Ha a megadott négy érintő és az ötödik iránya páronként nem párhuzamos egyenesek, és a négy érintő közül semelyik három nem megy át egy ponton, akkor a feladatnak egy megoldása van. Az F pontot ugyanis a lehetséges négy kör egyértelműen meghatározza, és ezután egyértelmű a csúcsérintő, majd az ötödik érintő szerkesztése is. Egyéb esetekben pedig nincs megoldás.

Miklós György (Bp., I. István Gimn., III. o. t.)