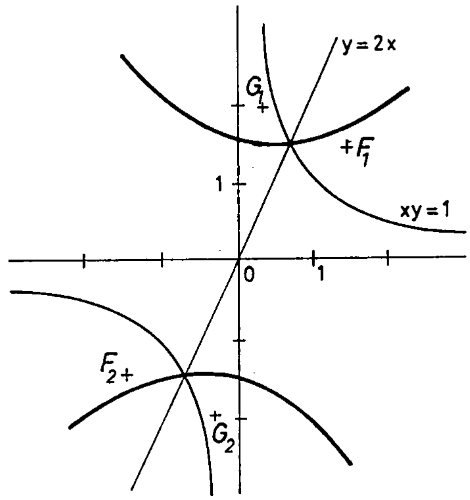
I. megoldás. Az $x \cdot y = 1$ egyenletű hiperbola úgynevezett „egyenlő szárú" hiperbola, amelynek tengelyei egyenlők. Valós tengelye az $(1;1)$ és $(-1;-1)$ pontok közötti szakasz, amelynek hossza: $2a = 2\sqrt{2}$. Ezért a képzetes tengely: $2b = 2\sqrt{2}$. Ismeretes, hogy minden hiperbolára $a^2 + b^2 = c^2$, ahol c a fókuszok távolságának fele, így $c = 2$. Ezért a két fókusz: $F_1(\sqrt{2}; \sqrt{2})$, illetve $F_2(-\sqrt{2}; -\sqrt{2})$.



A tükörkép hiperbola tengelyeinek hossza nyilván változatlan, fókuszai legyenek G_1 és G_2. F_1-et és F_2 t az $y = 2x$ egyenesre tükrözve a G_1 és G_2 pontok koordinátái egyszerű számolással:

$$G_1\left(\frac{\sqrt{2}}{5}; \frac{7\sqrt{2}}{5}\right) \text{ illetve } G_2\left(-\frac{\sqrt{2}}{5}; -\frac{7\sqrt{2}}{5}\right).$$

A hiperbola definíciója szerint a G_1, G_2 fókuszú és $2a = 2\sqrt{2}$ valós tengelyű hiperbola éppen azokat a P(x; y) pontokat tartalmazza, amelyekre:

$$G_1P - G_2P = 2\sqrt{2} \quad \text{vagy} \quad G_2P - G_1P = 2\sqrt{2}\,. \tag{1}$$

A hiperbola egyenlete ezért:

$$\left|\sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7\sqrt{2}}{5}\right)^2} - \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7\sqrt{2}}{5}\right)^2}\right| = 2\sqrt{2}. \tag{2}$$

Négyzetre emelve és rendezve:

$$x^2 + y^2 = \sqrt{\left(x - \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(y - \frac{7\sqrt{2}}{5}\right)^2} \cdot \sqrt{\left(x + \frac{\sqrt{2}}{5}\right)^2 + \left(y + \frac{7\sqrt{2}}{5}\right)^2}. \tag{3}$$

A (3) egyenlet az (1)-ben (illetve (2)-ben) „vagy"-gyal kapcsolt két egyenlet következménye, de (3)-ból is következik az (1)-ben szereplő két egyenlet. Ezért (1), (2) és (3) páronként ekvivalensek. Mivel (3) mindkét oldala nemnegatív, négyzetre emelése után vele ekvivalens egyenlethez jutunk:

$$(x^2 + y^2)^2 = \left(x^2 + y^2 + 4 - \frac{2x\sqrt{2}}{5} - \frac{14y\sqrt{2}}{5}\right) \cdot \left(x^2 + y^2 + 4 + \frac{2x\sqrt{2}}{5} + \frac{14y\sqrt{2}}{5}\right).$$

Ebből

$$(x^2 + y^2)^2 = (x^2 + y^2 + 4)^2 - \left(\frac{2x\sqrt{2}}{5} + \frac{14y\sqrt{2}}{5}\right)^2,$$

amiből

$$8x^2 + 8y^2 + 16 = \frac{8x^2 + 2 \cdot 56xy + 8 \cdot 49y^2}{25}.$$

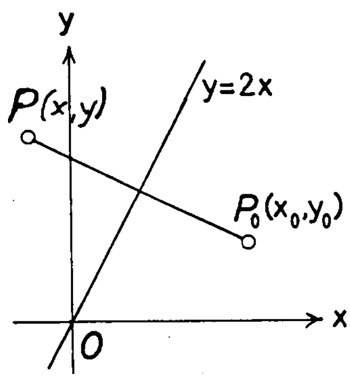
Végül rendezés után a tükörkép hiperbola egyenlete:

$$12y^2 + 7xy - 12x^2 = 25.$$

Pór Attila (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)

II. megoldás. Legyen az $x \cdot y = 1$ egyenletű hiperbola tetszőleges pontja $P_0(x_0; y_0)$, ennek tükörképe az $y = 2x$ egyenletű egyenesre $P(x; y)$. Mivel a P_0P egyenes merőleges az $y = 2x$-re, iránytangense $-1/2$, és így

(4) $$\frac{y - y_0}{x - x_0} = -\frac{1}{2}.$$



A P_0 P szakasz $(\frac{x_0 + x}{2}; \frac{y_0 + y}{2})$ felezőpontja rajta van az $y = 2x$ egyenesen, ezért

(5) $$\frac{y + y_0}{2} = 2 \cdot \frac{x + x_0}{2}.$$

A (4) és (5)-ből álló egyenletrendszer megoldásaként az eredeti koordináták az újakkal kifejezve:

$$x_0 = \frac{4y - 3x}{5}; \quad y_0 = \frac{4x + 3y}{5}.$$

Tekintve, hogy $x_0 \cdot y_0 = 1$, a tükörkép hiperbola egyenlete

$$\frac{4y - 3x}{5} \cdot \frac{4x + 3y}{5} = 1,$$

amelyből

$$12y^2 + 7xy - 12x^2 = 25.$$