Megoldás. A koszinusz-függvény páros és 2π szerint periodikus, ezért ha egy α megfelel a feladat követelményének, akkor $\pm\alpha + 2k\pi$ is megfelel tetszőleges k egész szám mellett. Elég tehát az olyan α számokat megkeresnünk, amelyek teljesítik a feladat feltételét és $0 < \alpha \leqq \pi$. A $\cos\alpha < 0$ feltétel szerint $\pi \geqq \alpha > \pi/2$, a $\cos 2\alpha < 0$ feltétel miatt pedig $\alpha \neq \pi$. Így

(1) $$\frac{\pi}{2} < \alpha < \pi.$$

A $\cos 2^n\alpha < 0$ feltétel általában azt jelenti, hogy van olyan l_n egész, amelyre $\pi/2 + 2l_n\pi < 2^n\alpha < 3\pi/2 + 2l_2\pi$, vagyis az $\alpha_0 = 2\alpha/\pi$ jelöléssel

(2) $$4l_n + 1 < 2^n\alpha_0 < 4l_n + 3.$$

Az (1) feltétel szerint $[\alpha_0] = 1$. Bebizonyítjuk, hogy a négyes számrendszerben α_0 =1,= 1,111..., azaz a négyes számrendszerben α_0 mindegyik jegye 1.

A (2) feltétel pontosan azt jelenti, hogy a $2^n\alpha_0$ számot négyes számrendszerben felírva, az egyesek helyén 1-es vagy 2-es áll. De megfelelő négyhatvánnyal szorozva α_0 törtrészének bármelyik jegye eltolható az egyesek helyére. (Az m-edik jegy akkor kerül az egyesek helyére, ha $4^m = 2^{2m}$-mel szorzunk.) Tehát α_0 törtrészének minden jegye 1-es vagy 2-es.

De ugyanez igaz $2\alpha_0$-ra is, hiszen annak törtrészéből is bármelyik jegy eltolható az egyesek helyére, megfelelő kettőhatvánnyal szorozva. Tegyük fel, hogy α_0 ban van egy kettes jegy valahol. Az első kettes jegy legyen az m-edik jegy a vessző után: α_0 = 1,1...112... (m db 1-es). Ekkor $4^{m-1}\alpha_0 = 11\ldots11,2\ldots$, és ezt kettővel szorozva az egyesek helyére 3-as kerül, hiszen a törtrész nagyobb 1/2-nél, és így van átvitel. Így $2^{2m-1}\alpha_0$ = 22...23,1... vagy 22...23,0..., s ez ellentmond annak, hogy $2^{2m-1}\alpha_0$-ban az egyesek helyén 1-es vagy 2-es áll. Ezzel beláttuk, hogy $\alpha_0 = 1,\dot{1} = 4/3$, vagyis $\alpha = 2\pi/3$. A feladat feltételének tehát csak a $\pm 2\pi/3 + 2k\pi$ ($k = 0, \pm1, \pm2, \ldots$) alakú számok felelhetnek meg és azok meg is felelnek.

Megjegyzés. A feladat és megoldása megtalálható a következő könyvben: Pataki J.-Reiman I.: Matematikai Versenyek 1989, 45–47. oldal.