Megoldás. Az állítást indirekt módon bizonyítjuk. Tegyük fel, hogy van olyan, minden valós x helyen értelmezett, g és h periodikus függvény, amelyekkel fennáll az

$$x^2 = g(x) + h(x) \tag{1}$$

függvényegyenlet. Legyen a g függvény egy periódushossza $p > 0$ és a h függvény egy periódushossza $q > 0$. Ekkor minden x-re teljesülnek a

$$g(x+p) = g(x) \quad \text{és} \quad h(x+q) = h(x) \tag{2}$$

egyenletek. Helyettesítsük most rendre az $x = 0,\ p,\ q$ és $p+q$ értékeket az (1) egyenletbe. Ekkor a – periodikusság felhasználásával – rendre a

$$\begin{gathered}
0 = g(0) + h(0) = g(p) + h(q),\\
p^2 = g(p) + h(p), \qquad q^2 = g(q) + h(q),\\
(p+q)^2 = g(p+q) + h(p+q) = g(q) + h(p)
\end{gathered}$$

egyenletekhez jutunk. Itt az első és utolsó egyenlet összegéből a 2. és 3. egyenletet kivonva azt kapjuk, hogy

$$2pq = g(q) + h(p) + g(p) + h(q) - g(p) - h(p) - g(q) - h(q) = 0,$$

azaz valamelyik periódushossz $-$ p vagy q $-$ nulla. Ez ellentmond feltevésünknek, s így bizonyítja a feladat állítását.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)

Megjegyzés. Ugyanígy bizonyítható az is, hogy $k \geq 2$ esetén az $f(x) = x^k$ függvény soha nem áll elő két periodikus függvény összegeként: mindössze annyit kell felhasználni, hogy pozitív p és q esetén $p^k + q^k < (p+q)^k$. Vegyük azonban észre, hogy $k = 1$ esetén $p^1 + q^1 = (p+q)^1$, ez esetben tehát a fenti gondolatmenettel *nem* jutunk ellentmondáshoz. Az tehát a fenti bizonyításból nem derül ki, hogy az $f(x) = x$ függvény sem áll elő két periodikus függvény összegeként.

Megmutatjuk viszont, hogy a fenti bizonyítás alapgondolatával belátható, hogy az $f(x) = x^k$ függvény nem áll elő k darab (vagy annál kevesebb) periodikus függvény összegeként. Először csak $k = 3$-ra mutatjuk be a bizonyítást, utána pedig megmondjuk, hogyan általánosítható. Tegyük fel, hogy van három periodikus függvény, $g_1(x), g_2(x)$ és $g_3(x)$, amelyekre teljesül az

$$x^3 = g_1(x) + g_2(x) + g_3(x)$$

függvényegyenlet. Legyen a $g_i(x)$ függvény egy periódushossza p_i, és helyettesítsük e függvényegyenletben az x helyére rendre a következő $8 = 2^3$ értéket: $p_1 + p_2 + p_3,\ p_1 + p_2,\ p_1 + p_3,\ p_2 + p_3,\ p_1,\ p_2,\ p_3$ és 0.

A periodikusságot is felhasználva a következő egyenleteket kapjuk:

$$(p_1 + p_2 + p_3)^3 = g_1(p_1 + p_2 + p_3) + g_2(p_1 + p_2 + p_3) + g_3(p_1 + p_2 + p_3) =$$

$$\begin{aligned}
&= g_1(p_2 + p_3) + g_2(p_1 + p_3) + g_3(p_1 + p_2),\\
(p_1 + p_2)^3 &= g_1(p_1 + p_2) + g_2(p_1 + p_2) + g_3(p_1 + p_2) =\\
&= g_1(p_2) + g_2(p_1) + g_3(p_1 + p_2),\\
(p_1 + p_3)^3 &= g_1(p_3) + g_2(p_1 + p_3) + g_3(p_1),\\
(p_2 + p_3)^3 &= g_1(p_2 + p_3) + g_2(p_3) + g_3(p_2),\\
p_1^3 &= g_1(p_1) + g_2(p_1) + g_3(p_1) = g_1(0) + g_2(p_1) + g_3(p_1),\\
p_2^3 &= g_1(p_2) + g_2(0) + g_3(p_2),\\
p_3^3 &= g_1(p_3) + g_2(p_3) + g_3(0),\\
0 &= g_1(0) + g_2(0) + g_3(0).
\end{aligned}$$

Adjuk össze az első, az ötödik, a hatodik és hetedik egyenletet, s vonjuk ki belőle a többiek összegét. Ekkor a jobb oldalon, mint könnyen ellenőrizhető, minden kiesik, tehát nulla áll. A bal oldalon viszont $(p_1 + p_2 + p_3)^3 - (p_1 + p_2)^3 - (p_1 + p_3)^3 - (p_2 + p_3)^3 + p_1^3 + p_2^3 + p_3^3 - 0 = 6p_1p_2p_3$. Megint azt az ellentmondást kapjuk tehát, hogy valamelyik periódushossz nulla.

A bizonyítás tetszőleges k-ra csak annyiban különbözik a fentitől, hogy 2^k egyenletet kapunk: ha a g_i függvény periódusa p_i, akkor minden $0 \leq m \leq k$-ra $\binom{k}{m}$ darab egyenletet kell felírni: minden lehetséges módon kiválasztunk m darabot a $p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_k$ számok közül, mondjuk $p_{i_1},\ p_{i_2},\ \ldots,\ p_{i_m}$-t, és felírjuk a

$$\begin{gathered}
(p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m})^k = g_1(p_{i_1} + \ldots + p_{i_m}) + \ldots + g_{i_1}(p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}) +\\
+ g_{i_1+1}(p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}) + \ldots + g_{i_2}(p_{i_1} + p_{i_2} + \ldots + p_{i_m}) +\\
+ \ldots + g_k(p_{i_1} + \ldots + p_{i_m})
\end{gathered}$$

egyenletet, majd ezeket páratlan m-re negatív, páros m-re pozitív előjellel összeadjuk.

Ekkor – a periodikusság miatt – a jobb oldalon megint minden kiesik, a bal oldalon pedig a $0-p_1^k-p_2^k-\ldots-p_k^k+(p_1+p_2)^k+(p_1+p_3)^k+\ldots+(p_1+p_k)^k+(p_2+p_3)^k+\ldots+(p_2+p_k)^k+\ldots+(p_{k-1}+p_k)^k-(p_1+p_2+p_3)^k-\ldots-(p_1+p_2+p_k)^k-\ldots+(-1)^k(p_1+p_2+\ldots+p_k)^k$ összeg szerepel. Erről némi számolással belátható, hogy a műveletek elvégzése során minden olyan tagja kiesik, amelyben nem szerepel minden p_i tényezőként. A bal oldal értéke tehát $(-1)^k k! p_1 p_2 \ldots p_k$. Itt $(-1)^k k! \neq 0$, tehát megint ahhoz az ellentmondáshoz jutunk, hogy valamelyik periódushosszra nulla adódik.

Mivel nem zártuk ki, hogy a g_i függvények között az azonosan nulla függvény is szerepeljen (hiszen az is periodikus függvény), így beláttuk, hogy az$f(x)=x^k$ függvény nem áll elő legfeljebb k darab periodikus függvény összegeként.