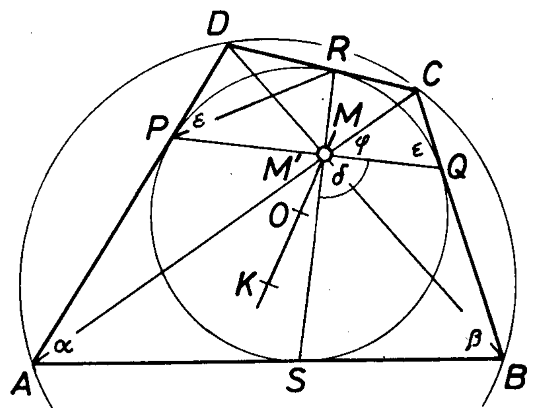
Megoldás. A feladat megoldása érdekében először azt mutatjuk meg, hogy minden érintőnégyszögben a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok metszéspontján mindkét átló átmegy. Használjuk az *1.ábra* jelöléseit.



1. ábra

Jelölje AC és PQ metszéspontját M. A P illetve Q pontban érintő oldalak PQ-val egyenlő szöget zárnak be, így az AMP és CMQ háromszögekre a szinusztételt alkalmazva:

(1) $$AM/AP = \sin\epsilon/\sin\varphi = CM/CQ, \quad \text{amiből} \quad AM/CM = AP/CQ.$$

Legyen AC és RS metszéspontja M'. Ekkor az előzőkhöz hasonlóan kapjuk, hogy $AM'/AS = CM'/CR$. Mivel a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak, $AS = AP$ és $CR = CQ$, ezért

(2) $$AM'/CM' = AP/CQ.$$

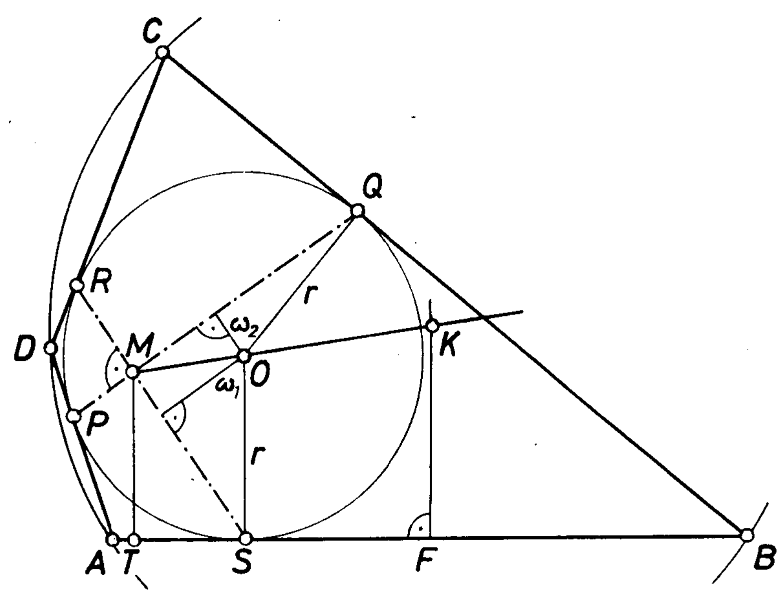
(1) és (2) összehasonlításából $M = M'$, tehát az AC átló átmegy PQ és RS metszéspontján. Ugyanezt elmondhatjuk BD-ről is, tehát RS és PQ valóban áthaladnak az M ponton.

Ezután bebizonyítjuk, hogy ha egy érintőnégyszög húrnégyszög, akkor a szemközti érintési pontokat összekötő szakaszok merőlegesek egymásra.

Mivel $\alpha + \gamma = 180°$, a beírt kör $\widehat{SP}$ és $\widehat{RQ}$ ívéhez összesen ugyancsak $180°$ középponti szög tartozik. A megfelelő kerületi szögek összege így ennek fele:

$$PRS\sphericalangle + RPQ\sphericalangle = 90°.$$

Mivel $PRS\sphericalangle = PRM\sphericalangle$ és $RPQ\sphericalangle = RPM\sphericalangle$, ezért PQ és RS valóban merőlegesek.



2. ábra

Végül igazoljuk, hogy a négyszög köré írt kör középpontja az MO egyenesen van. Az AB oldalfelező merőlegesének MO-val való metszéspontját jelölje K, az M, K pontok merőleges vetülete az AB egyenesen T, ill. F *(2. ábra)*. A párhuzamos szelők tétele szerint

(3) $$MO/OK=TS/SF.$$

Célunk a jobb oldalon álló arány meghatározása. Nyilván $SR=2r\sin\omega_1$, így

(4) $$SM=R\sin\omega_1+r\cos\omega_2,$$

ezért (a merőleges szárú ASM és ω_1 szögekkel)

$$TS=SM\cdot\cos\omega_1,$$

azaz (4) szerint

(5) $$TS=r\cos\omega_1(\sin\omega_1+\cos\omega_2).$$

Az $APOS$ deltoidban AO szögfelező, ahonnan

(6) $$AS=r\ \mathrm{tg}\frac{POS\sphericalangle}{2}=r\ \mathrm{tg}\frac{\omega_1+90^\circ+\omega_2-2\omega_2}{2}=r\ \mathrm{tg}\frac{\omega_1-\omega_2+90^\circ}{2};$$

hasonlóan

(7) $$SB=r\ \mathrm{tg}\frac{SOQ\sphericalangle}{2}=r\ \mathrm{tg}\frac{360^\circ-(\omega_1+90^\circ+\omega_2)}{2}=-r\ \mathrm{tg}\frac{\omega_1+\omega_2+90^\circ}{2}.$$

(6) és (7) alapján

$$SF=\frac{1}{2}(SB-SA)=-\frac{r}{2}\left(\mathrm{tg}\frac{\omega_1+\omega_2+90^\circ}{2}+\mathrm{tg}\frac{\omega_1-\omega_2+90^\circ}{2}\right).$$

Felhasználva a $\mathrm{tg}\alpha+\mathrm{tg}\beta=\sin(\alpha+\beta)/\cos\alpha\cos\beta$ és a $2\cos\alpha\cos\beta=\cos(\alpha+\beta)+\cos(\alpha-\beta)$ azonosságokat,

$$SF=-r\frac{\sin(\omega_1-90^\circ)}{\cos(\omega_1+90^\circ)+\cos\omega_2}=r\frac{\cos\omega_1}{\sin\omega_1-\cos\omega_2}$$

adódik, ebből pedig (3) és (5) felhasználásával

$$\frac{MO}{OK}=\frac{TS}{SF}=\sin^2\omega_1-\cos^2\omega_2.$$

Ha ezek után K' a BC oldal felező merőlegesének OM-mel való metszéspontját jelöli, akkor MO/OK' értéke ω_1 és ω_2 szerepének felcserélésével kapható:

$$\frac{MO}{OK'}=\sin^2\omega_2-\cos^2\omega_1=(1-\cos^2\omega_2)-(1-\sin^2\omega_1)=\sin^2\omega_1-\cos^2\omega_2=\frac{MO}{OK},$$

tehát $K=K'$. A négyszög köré írt kör középpontja így valóban az MO egyenesen van.

Benczúr Péter (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A vizsgált típusú négyszögekkel kapcsolatban megemlítünk egy érdekes tételt, az 1960. évi szeptemberi számunk 24. oldalán megoldott 599. gyakorlatot:

Az $ABCD$ húrnégyszög AC és BD átlói merőlegesek, F metszéspontjuknak az oldalakon való vetületei P,Q,R,S. Bizonyítsuk be, hogy a $PQRS$ négyszög húrnégyszög és egyben érintőnégyszög (idegen szóval bicentrikus, két középponttal bíró négyszög).

Következő számunkban több más idevágó régi feladatunkat is felidézzük.