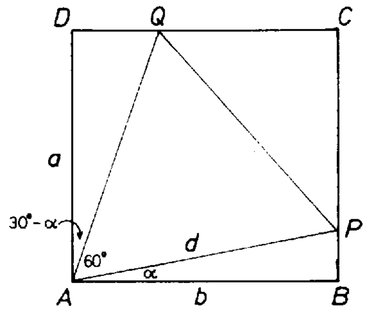
I. megoldás. Tegyük fel, hogy a téglalapba egy szabályos háromszög beírható az előírt módon.



1. ábra

Az 1. ábra jelöléseit használva $b = d \cdot \cos\alpha$ és $a = d \cdot \cos(30^\circ - \alpha)$, ahol $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$. E két egyenletből

$$\frac{a}{b} = \frac{\cos(30^\circ - \alpha)}{\cos\alpha}. \tag{1}$$

A jobb oldalt átalakítva:

$$\frac{a}{b} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg}\alpha. \tag{2}$$

Az α-ra vonatkozó feltételek alapján $0 \leq \operatorname{tg}\alpha \leq \dfrac{1}{\sqrt{3}}$, és így

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{\sqrt{3}} = \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{3}$$

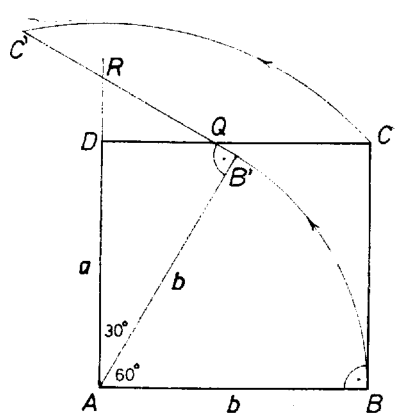
Az $ABCD$ téglalapba tehát csak akkor írható a kívánt módon szabályos háromszög, ha a téglalap oldalainak arányára a (3) feltétel teljesül.

Megfordítva: Mivel $\operatorname{tg}\alpha$ folytonos, minden olyan esetben, amikor (3) teljesül, lesz olyan α, amelyre fennáll (2) és (1), és így lesz olyan d pozitív valós szám, amelyre $a = d \cdot \cos(30^\circ - \alpha)$ és $b = d \cdot \cos\alpha$.

Ekkor d az $ABCD$ téglalapba a kívánt módon beírt szabályos háromszög oldalának a hossza.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Tegyük fel először, hogy $a \geq b$. Ha az 1. ábra APQ szabályos háromszögének a P csúcsát A körül pozitív irányban 60°-kal elforgatjuk, P a Q-ba megy át. Ezért a szabályos háromszög a kívánt módon pontosan akkor írható a téglalapba, ha a BC szakasz A körüli 60°-os elforgatottjának van közös pontja a DC szakasszal. A 2. ábra alapján láthatjuk, hogy ez éppen akkor következik be, ha $AR \geq a$.



2. ábra

Az ábra $AB'R$ háromszögéből

$$AR = \frac{b}{\cos 30^\circ} = \frac{2b}{\sqrt{3}}.$$

Így a keresett feltétel:

$$a \leq \frac{2b}{\sqrt{3}}, \quad \text{amiből} \quad \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}. \tag{1}$$

Mivel a téglalap oldalai különböző hosszúságúak lehetnek és szerepük szimmetrikus, a $b > a$ esetben az előbbihez hasonlóan fenn kell állnia, hogy

$$\frac{b}{a} \leq \frac{2}{\sqrt{3}} \tag{2}$$

(1) és (2) alapján

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{a}{b} \leq \frac{2}{\sqrt{3}}.$$

Kún Gábor (Bp., Berzsenyi D. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. A II. megoldás módszere működik olyan egyenlő szárú háromszög beírása esetére is, ahol a szárak közös pontja az A, a szárak közötti szög pedig φ, és $\varphi \leq 90°$. Ekkor a keresett feltétel:

$$\sin\varphi \leq \frac{a}{b} \leq \frac{1}{\sin\varphi}.$$