I. megoldás. A szokásos jelöléseket használva $a = 2r \cdot \sin\alpha$, $b = 2r\cdot\sin\beta$.

A feltétel szerint $a^2 + b^2 = 4r^2$, azaz

$$4r^2 \cdot \sin^2\alpha + 4r^2 \cdot \sin^2\beta = 4r^2,$$

amiből

$$\sin^2\alpha + \sin^2\beta = 1. \tag{1}$$

Ismeretes, hogy $\sin^2\alpha = \dfrac{1-\cos 2\alpha}{2}$, ezért (1) így folytatható:

$$\frac{1-\cos 2\alpha}{2} + \frac{1-\cos 2\beta}{2} = 1, \quad \text{tehát} \quad \cos 2\alpha + \cos 2\beta = 0.$$

A bal oldalt szorzattá alakítva:

$$2\cdot\cos(\alpha+\beta)\cdot\cos(\alpha-\beta) = 0,$$

ami pontosan akkor teljesül, ha vagy

$$\cos(\alpha+\beta) = 0 \tag{2}$$

vagy

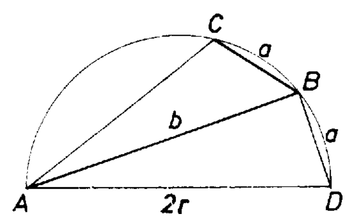
$$\cos(\alpha-\beta) = 0. \tag{3}$$

(2)-ből azt láthatjuk, hogy $\alpha+\beta = 90^\circ$, tehát ekkor a háromszög derékszögű, (3) pedig azt jelenti, hogy $|\alpha-\beta| = 90^\circ$, amikor is a háromszög biztosan tompaszögű. Erre az utóbbi esetre példa lehet egy olyan egyenlő szárú háromszög, amelyben a szárak hossza és a körülírt kör sugara r, a szárak közötti szög pedig 120°. Ennek a háromszögnek az alapja $b = r\cdot\sqrt{3}$, a két oldalának négyzetösszege: $r^2 + 3r^2 = 4r^2$, ami valóban egyenlő a körülírt kör átmérőjének négyzetével.

A feladat kérdésére tehát nemleges választ kell adnunk.

Harcos Gergely (BP., ELTE Apáczai Csere J. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. Megmutatjuk, hogy a háromszög nem feltétlenül derékszögű.



Az ábrát úgy rajzoltuk, hogy $CB = BD = a$ és $AD = 2r$ legyen. Az ábra további jelöléseit is használva, a Pitagorasz-tétel szerint az ABD háromszögre: $a^2 + b^2 = 4r^2$.

Mivel az ABC háromszög két oldala is a, illetve b, $a^2 + b^2 = 4r^2$ erre a háromszögre is teljesül, de az ACB szög nyilván tompaszög.

Egri Ilona (Győr, Révai M. Gimn., III. o. t.)