Megoldás. A feltétel szerint x^2+y^2 osztható öttel. Ha x osztható öttel, tehát $x=5k$, akkor $x^2=25k^2$, és x^2+y^2 csak úgy lehet osztható öttel, ha y^2 is osztható öttel, tehát y is, azaz $y=5l$. Ekkor $\frac{x^2+y^2}{5}=5(k^2+l^2)=(2k+l)^2+(k-2l)^2$, tehát előáll két négyzetszám összegeként. Ha x vagy $5k+1$ vagy $x=5k-1$ alakú, akkor $x^2=5K+1$ s ekkor $y^2=5L+4$. Ez csak úgy lehetséges, ha y vagy $5l+2$ vagy $5l-2$ alakú. Mivel $\frac{x^2+y^2}{5}$ értékén x és y előjele nem változtat, ezért megfelelő előjelváltoztatással elérhető, hogy $x=5k+1$ és $y=5l+2$. Ekkor $\frac{2x-y}{5}$ és $\frac{x+2y}{5}$ egész szám, és négyzetük összege éppen $\frac{x^2+y^2}{5}$. Marad az az eset, ha x vagy $5k+2$ vagy $5k-2$ alakú. Ekkor $x^2=5K+4$, $y^2=5L+1$, tehát – x és y értékét megfelelő előjellel ellátva – feltehető, hogy $x=5k+2$ és $y=5l+1$. Ekkor $\frac{2x+y}{5}$ és $\frac{x-2y}{5}$ egész szám, és négyzetük összege éppen $\frac{x^2+y^2}{5}$.

Megjegyzés. Egy ismert tétel szerint egy természetes szám pontosan akkor áll elő két négyzetszám összegeként, ha prímtényezős felbontásában minden $4k+3$ alakú prímszám páros kitevőn szerepel (a bizonyítás megtalálható a KöMaL 1990/2. számában, a 61-64. oldalon). A feladat feltevése alapján $x^2+y^2=5n$, ahol n egész szám. Az idézett tétel értelmében – és mivel 5 prímszám, de nem $4k+3$ alakú – n prímtényezős felbontásában minden $4k+3$ alakú prímszám páros kitevőn szerepel, mert ugyanez igaz $5n$-re is; tehát n is előáll két négyzetszám összegeként.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)