I. megoldás. A bizonyítandó egyenlőség bal oldalán szereplő húrokat rendre kiszámítva:

$$A_1A_2 = 2\cdot\sin 20^\circ,\quad A_1A_3 = 2\cdot\sin 40^\circ,\quad A_1A_4 = 2\cdot\sin 60^\circ,$$

$$A_1A_5 = 2\cdot\sin 80^\circ.$$

Azt kell tehát bizonyítanunk, hogy

$$16\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ = 3.$$

Induljunk ki a $\sin 100^\circ - \sin 80^\circ = 0$ egyenlőségből. Ennek mindkét oldalához adjuk hozzá a $\sin 60^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}$ számot:

$$\sin 100^\circ + \sin 60^\circ - \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A bal oldal első két tagjának összegét szorzattá alakítva:

$$2\cdot\sin 80^\circ\cdot\cos 20^\circ - \sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

azaz

$$2\cdot\left(\cos 20^\circ - \frac{1}{2}\right)\cdot\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}$$

Mivel $\cos 60^\circ = \dfrac{1}{2}$, ezt így írhatjuk:

$$2\left(\cos 20^\circ - \cos 60^\circ\right)\cdot\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

A zárójelben lévő különbséget szorzattá alakítva

$$2\cdot 2\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Mindkét oldalt a $4\cdot\sin 60^\circ = 2\sqrt{3}$ számmal szorozva:

$$16\cdot\sin 20^\circ\cdot\sin 40^\circ\cdot\sin 60^\circ\cdot\sin 80^\circ = \frac{\sqrt{3}}{2}\cdot 2\sqrt{3} = 3,$$

amit bizonyítanunk kellett.

Harcos Gergely (BP., ELTE Apáczai Csere J. Gimn. III. o. t.)

II. megoldás. A feladat állításánál valamivel általánosabb a következő tétel: Az egységsugarú körbe írt $A_1A_2\ldots A_n$ szabályos n-szögre

$$A_1A_2\cdot A_1A_3\ldots A_1A_n = n.$$

Bizonyítása megtalálható *Reiman István*: A geometria és határterületei c. könyvének 224–225. oldalán. Ha ebben a tételben n páratlan, akkor $A_1A_k = A_1A_{n-k+2}\left(k = 1, 2, \ldots, \dfrac{n+1}{2}\right)$, és így

$$\left(A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot\ldots A_1A_{\frac{n+1}{2}}\right)^2 = n,$$

amelyből

$$A_1A_2\cdot A_1A_3\cdot\ldots\cdot A_1A_{\frac{n+1}{2}} = \sqrt{n}.$$

Ezt $n = 9$-re alkalmazva éppen a feladat állítását kapjuk.