A feladat kitűzőjének igen frappáns megoldását ismertetjük. Mindenekelőtt megmutatjuk, hogy ha α, β, γ egy nem derékszögű háromszög szögei, akkor

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma=\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma. \tag{1}$$

Ugyanis $\alpha+\beta+\gamma=\pi$, tehát $\alpha+\beta=\pi-\gamma$. Ezért $\operatorname{tg}(\alpha+\beta)=\operatorname{tg}(\pi-\gamma)$, azaz

$$\frac{\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta}{1-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta}=-\operatorname{tg}\gamma.$$

és ebből már következik (1). A feladat kérdésére úgy válaszolunk, hogy megvizsgáljuk a

$$\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)$$

különbség előjelét. Egyszerű átalakításokkal:

$$\begin{aligned}
&\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\right)=\\
&=\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma-\frac{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\operatorname{tg}\beta\operatorname{tg}\gamma}=\\
&=\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2-\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\\
&=\frac{tg^2\alpha+\operatorname{tg}^2\beta+\operatorname{tg}^2\gamma+\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}=\\
&=\frac{1}{2}\frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta)^2+(\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2+(\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\alpha)^2}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma},
\end{aligned}$$

ahol közben fölhasználtuk (1)-et.

A különbség utolsó alakjában a számláló mindig pozitív, a nevező pedig tompaszögű háromszögben negatív, hegyesszögűben pozitív. Ezért a szögek tangenseinek összege tompaszögű háromszögekben kisebb, mint a kotangensek összege.

Megjegyzés. Megoldásunkból kitűnik, hogy

$$\operatorname{ctg},\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma\ <\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma \tag{2}$$

minden hegyesszögű háromszögben. Megmutatjuk, hogy a (2) egyenlőtlenség nem éles, hanem igaz a következő élesebb egyenlőtlenség is:

$$3(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\ <\ \operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma. \tag{3}$$

Induljunk ki a nyilvánvaló

$$0\leqq(\operatorname{tg}\alpha-\operatorname{tg}\beta)^2+(\operatorname{tg}\beta-\operatorname{tg}\gamma)^2+(\operatorname{tg}\gamma-\operatorname{tg}\alpha)^2 \tag{4}$$

egyenlőtlenségből. Ebből

$$\begin{gathered}
0\leqq 2tg^2\alpha+2tg^2\beta+2tg^2\gamma-2tg\,\alpha\cdot tg\,\beta-2tg\,\beta\cdot tg\,\gamma-2tg\,\gamma\cdot tg\,\alpha,\\
tg\,\alpha\cdot tg\,\beta+tg\,\beta\cdot tg\,\gamma+tg\,\gamma\cdot tg\,\alpha\leqq tg^2\alpha+tg^2\beta+tg^2\gamma.
\end{gathered}$$

amiből

$$3(\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma+\operatorname{tg}\gamma\cdot\operatorname{tg}\alpha)\leqq(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2.$$

Mindkét oldalt a pozitív $\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma$-val osztva:

$$3\left(\frac{1}{\operatorname{tg}\alpha}+\frac{1}{\operatorname{tg}\beta}+\frac{1}{\operatorname{tg}\gamma}\right)\ \leqq\ \frac{(\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma)^2}{\operatorname{tg}\alpha\cdot\operatorname{tg}\beta\cdot\operatorname{tg}\gamma}$$

azaz (1) szerint:

$$3(\operatorname{ctg}\alpha+\operatorname{ctg}\beta+\operatorname{ctg}\gamma)\leqq\operatorname{tg}\alpha+\operatorname{tg}\beta+\operatorname{tg}\gamma,$$

és ez éppen (3). Mivel átalakításaink megfordíthatóak, (3)-at igazoltuk. Könnyen belátható, hogy (3)-ban pontosan akkor teljesül egyenlőség, amikor (4)-ben, tehát a $\operatorname{tg}\alpha=\operatorname{tg}\beta=\operatorname{tg}\gamma$ esetben, amikor is $\alpha=\beta=\gamma=\pi/3$.