Megoldás. Minden valós szám legalább akkora, mint az egészrésze; így, ha x megoldása az egyenletnek, akkor

$$x \leq 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} = 1 + \frac{x}{2} \cdot \frac{2^n - 1}{2^n - n} = x + 1 - \frac{x}{2^n},$$

azaz $x \leq 2^n$. A 2^n nyilván megoldása az egyenletnek, ezért a továbbiakban csak azzal az esettel foglalkozunk, amikor $x < 2^n$. Az x szükségképpen egész, hiszen az egyenlet jobb oldala egész számok összege. Tegyük fel először, hogy $x \geq 0$, és írjuk fel x-et a kettes számrendszerben:

$$x = \sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i \qquad (a_i = 0 \text{ vagy } 1).$$

A feladat feltétele szerint

$$\sum_{i=0}^{n-1} a_i 2^i = x = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \left[\frac{x}{2^k}\right] = 1 + \sum_{k=1}^{n-1} \sum_{i=k}^{n-1} a_i 2^{i-k}.$$

Az összegzések sorrendjét felcserélve:

$$x = 1 + \sum_{i=1}^{n-1} a_i \sum_{k=1}^{i} 2^{i-k} = 1 + \sum_{i=k}^{n-1} a_i (2^i - 1) = x + 1 - \sum_{i=0}^{n-1} a_i,$$

azaz x pontosan akkor megoldás, ha $\Sigma_{i=0}^{n-1} a_i = 1$, vagyis x a 2 hatványa. Az egyenlet nemnegatív megoldásai ennek alapján: $1,\ 2,\ 4,\ \ldots,\ 2^{n-1},\ 2^n$.

A negatív megoldásokat is a kettes számrendszerbeli alakjukban keressük: legyen

$$x = -2^t \left(1 + \sum_{i=1}^{m} b_i 2^i\right) = -2^t \cdot y,$$

ahol feltehető, hogy $m \geq n$ (azaz b_m lehet 0 is). Ha $n \leq t$, akkor az x-re fennálló egyenlet a következő:

$$x = 1 + \sum_{k=1}^{n} \frac{x}{2^k} = 1 + x - \frac{x}{2^n},$$

ahonnan $x = 2^n$, és ez nem negatív. Így $n > t$, és ezzel a feladatbeli egyenlet jobb oldala:

$$\begin{aligned}
1 + \sum_{k=1}^{t} \frac{x}{2^k} + \sum_{v=1}^{n-t} \left[-\frac{y}{2^v}\right] &= x + 1 - \frac{x}{2^t} + \sum_{v=1}^{n-t} -1 - \sum_{i=v}^{m} b_i 2^{i-v} = \\
&= x + 1 + y + t - n - \sum_{i=1}^{m} b_i \sum_{v=1}^{min\{i,n-t\}} 2^{i-v} = \\
&= x + 1 + y + t - n - \sum_{i=1}^{n-t-1} b_i \sum_{v=1}^{i} 2^{i-v} - \sum_{j=n-t}^{m} b_j \sum_{v=1}^{n-t} 2^{j-v} = \\
&= x + 1 + y + t - n - \sum_{i=1}^{n-t-1} b_i (2^i - 1) - \sum_{j=n-t}^{m} b_j (2^i - 2^{j-n+t}) = \\
&= x + 2 + t - n + \sum_{i=1}^{n-t-1} b_i + \left[\frac{y}{2^{n-t}}\right],
\end{aligned}$$

ezért

$$\left[\frac{y}{2^{n-t}}\right] = n - t - 2 - \sum_{i=1}^{n-t-1} b_i.$$

Mivel y pozitív, a megoldás pontosan akkor létezik, ha

$$n - t - 2 \geq \sum_{i=1}^{n-t-1} b_i,$$

vagyis ha a $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{n-t-1}$ számjegyek között legalább egy nulla van és $t \le n-2$. Ekkor pedig

$$y = 2^{n-t}\left(n-t-2-\sum_{i=1}^{n-t-1} b_i\right)+\left(1+\sum_{i=1}^{n-t-1} b_i 2^i\right),$$

tehát a negatív megoldások

$$x = -2^{n}\left(n-t-2-\sum_{i=1}^{n-t-1} b_i\right)-2^t\left(1+\sum_{i=1}^{n-t-1} b_i 2^i\right),$$

ahol $0 \le t \le n-2$ (t egész), és a $b_1,\ b_2,\ \dots,\ b_{n-t-1}$ számok közül tetszés szerint néhány (de legalább egy) 0, a többi 1.

Megjegyzés. Szembetűnő a pozitív és a negatív megoldások erősen eltérő alakja, amelyet főleg az a tény indokol, hogy az egészrész-függvény nem páratlan. Míg a pozitív megoldások könnyen áttekinthetők, a negatív egészekről már nem dönthető el „ránézéssel”, hogy megoldásai-e a feladatbeli egyenletnek. Például a -17 nem megoldás – semmilyen n mellett sem – jóllehet a kettes számrendszerbeli alakjában (-10001) van 0 jegy. A -7 viszont $n=4$-re megoldás, bár a kettes számrendszerben felírva csupa 1-esből áll. További különbség az is, hogy 2^k minden k-nál nem kisebb n-re megoldás, egy negatív szám viszont legfeljebb egy n érték mellett lehet megoldás, hiszen ekkor az $S_n = 1+\Sigma_{k=1}^{n}\left[x/2^k\right]$ összegek sorozata (n növekedtével) szigorúan monoton fogyó.