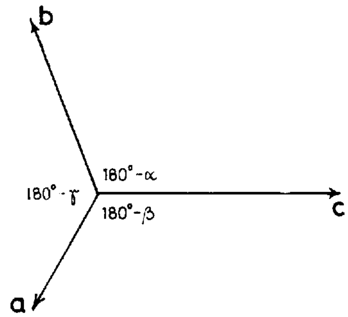
a) Vegyük fel a síkon a közös kezdőpontú **a, b, c** vektorokat az 1. ábra szerint. Legyen $|a| = 1-\cos\alpha$, $|b| = 1-\cos\beta$ és $|c| = 1-\cos\gamma$.

Felhasználjuk, hogy

$$\cos^2\alpha + \cos^2 + \beta + \cos^2\gamma = 1 - 2\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma. \tag{1}$$

(Ez az azonosság megtalálható pl. a Geometriai feladatok gyűjteménye II. kötet 434/f feladataként.)



1. ábra

Számítsuk ki az **a**, **b**, **c** vektorok összegének négyzetét:

$$(\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c})^2 = \mathbf{a}^2 + \mathbf{b}^2 + \mathbf{c}^2 + 2\mathbf{ab} + 2\mathbf{ac} + 2\mathbf{bc}.$$

A jobb oldali összeg utolsó három tagjában levő skaláris szorzatok kiszámításához szükséges szögek az 1. ábráról leolvashatók, tudjuk továbbá, hogy ez a négyzetösszeg nem negatív, ezért

$$(1-\cos\alpha)^2 + (1-\cos\beta)^2 + (1-\cos\gamma)^2 - 2(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)\cos\gamma -$$
$$-2(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma)\cos\alpha - 2(1-\cos\gamma)(1-\cos\alpha)\cos\beta \ge 0,$$

azaz

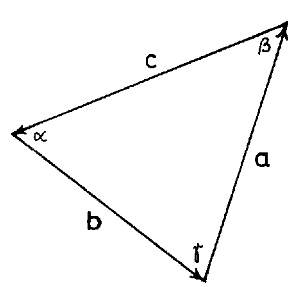
$$3 + \cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma - 4(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) +$$
$$+4(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma) - 6\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \ge 0.$$

(1)-et felhasználva:

$$4 - 4(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma) + 4(\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma) -$$
$$-8\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \ge 0,$$

amelyből 4-gyel osztva és szorzattá alakítva:

$$(1-\cos\alpha)(1-\cos\beta)(1-\cos\gamma) \ge \cos\alpha\cos\beta\cos\gamma.$$



2. ábra

Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $\mathbf{a}+\mathbf{b}+\mathbf{c} = 0$, azaz, ha az **a**, **b**, **c** vektorok egy háromszög oldalvektorai, tehát ha az 1.ábra vektorai a 2. ábra szerinti helyzetbe tolhatók el. Alkalmazzuk a 2. ábra háromszögére a sinustételt:

$$\sin\alpha : \sin\beta = |\mathbf{a}| : |\mathbf{b}| = (1-\cos\alpha) : (1-\cos\beta).$$

Ebből a $\sin\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\cos\frac{\alpha}{2}$ és az $1-\cos\alpha = 2\sin^2\frac{\alpha}{2}$ azonosságok szerint

$$\left(2\cdot\sin\frac{\alpha}{2}\cdot\cos\frac{\alpha}{2}\right) : \left(2\cdot\sin\frac{\beta}{2}\cdot\cos\frac{\beta}{2}\right) = \left(2\cdot\sin^2\frac{\alpha}{2}\right) : \left(2\cdot\sin^2\frac{\beta}{2}\right),$$

amiből

$$\operatorname{tg}\frac{\alpha}{2} = \operatorname{tg}\frac{\beta}{2}, \quad \text{és így} \quad \alpha = \beta.$$

Hasonlóan láthatjuk be, hogy $\beta = \gamma$, ezért (2)-ben egyenlőség csak akkor lesz, ha $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$.

b) Először azt mutatjuk meg, hogy

$$6\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma. \tag{3}$$

Tegyük fel először, hogy α, β, γ egyike sem tompaszög. Ekkor a számtani és mértani közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\sqrt[3]{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma} \le \frac{\cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma}{3} \tag{4}$$

Ismeretes, hogy $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \frac{1}{8}$. (Igazolása megtalálható pl. *Reiman I.:* A geometria és határterületei c. könyvének 236. oldalán.) Ebből

$$2\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \sqrt[3]{\cos^2\alpha\cos^2\beta\cos^2\gamma}. \tag{5}$$

(4) és (5) alapján

$$6\cdot\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma \le \cos\alpha\cos\beta + \cos\alpha\cos\gamma + \cos\beta\cos\gamma,$$

és egyenlőség csak akkor áll fenn, ha (4)-ben is és (5)-ben is egyenlőség van, ami csak $\alpha = \beta = \gamma = 60^\circ$ esetén lehetséges.

Ha a háromszög tompaszögű, feltehető, hogy $\gamma > 90^\circ$. Ekkor $\cos\alpha\cos\beta\cos\gamma$ negatív. Ha ezzel a szorzattal (3) mindkét oldalát elosztjuk, a kapott

$$6 \ge \frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} \tag{6}$$

egyenlőtlenség ekvivalens (3)-mal, ezért elegendő ezt bizonyítani. Tegyük fel, hogy α a legkisebb szög. Ekkor $\alpha < 60^\circ$, tehát $\frac{1}{\cos\alpha} < 2$. Mivel $\beta < 180^\circ - \gamma$, és $\cos x$ a $[0,\pi]$ intervallumon szigorúan monoton fogyó, ezért $\cos\beta > \cos(180^\circ - \gamma)$, amiből

$$\frac{1}{\cos\beta} < \frac{1}{\cos(180^\circ - \gamma)} = -\frac{1}{\cos\gamma}.$$

Ezután (6) jobb oldala így becsülhető:

$$\frac{1}{\cos\alpha} + \frac{1}{\cos\beta} + \frac{1}{\cos\gamma} < 2 - \frac{1}{\cos\gamma} + \frac{1}{\cos\gamma} = 2 < 6,$$

és azt is látjuk, hogy (6)-ban sohasem lehet egyenlőség.

Hátra van még a b)-ben levő jobb oldali egyenlőtlenség igazolása. Ismeretes, hogy

$$1 < \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma \le \frac{3}{2}, \tag{7}$$

és itt csak $\alpha = \beta = \gamma$ esetén lehet egyenlőség. (Ennek bizonyítása is megtalálható pl. *Reiman I.* fentebb említett könyvének 229. oldalán.) Szorozzuk meg (7) második egyenlőtlenségének mindkét oldalát $\frac{2}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)$-val. Ekkor

$$\frac{2}{3}(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 \le \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma,$$

ami így is írható:

$$(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2 - \frac{(\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma)^2}{3} \le \cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma. \tag{8}$$

Alkalmazzuk a számtani és négyzetes közép közötti egyenlőtlenséget a $|\cos\alpha|$, $|\cos\beta|$, $|\cos\gamma|$ számokra:

$$\sqrt{\frac{\cos^2\alpha + \cos^2\beta + \cos^2\gamma}{3}} \ge \frac{|\cos\alpha| + |\cos\beta| + |\cos\gamma|}{3} \ge \frac{\cos\alpha + \cos\beta + \cos\gamma}{3} > 0,$$

amiből

$$\cos^2\alpha+\cos^2\beta+\cos^2\gamma \geq \frac{(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2}{3}. \tag{9}$$

A (8) egyenlőtlenség bal oldalának második tagját a nála (9) szerint kisebbel helyettesítve:

$$(\cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma)^2-\cos^2\alpha-\cos^2\beta-\cos^2\gamma \leq \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

Ebből

$$2\cdot\cos\alpha\cos\beta+2\cdot\cos\alpha\cos\gamma+2\cdot\cos\beta\cos\gamma \leq \cos\alpha+\cos\beta+\cos\gamma.$$

Az egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha (8)-ban és (9)-ben is egyenlőség van, tehát az $\alpha=\beta=\gamma=60^\circ$ esetben. Ezzel a feladat mindkét állítását bebizonyítottuk.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.)