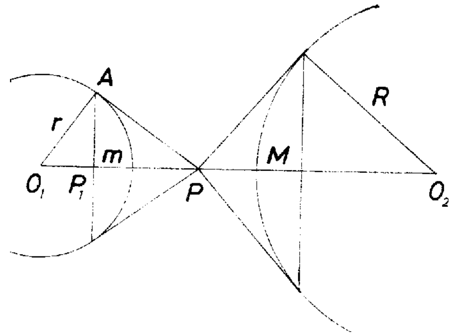
Használjuk az ábra jelöléseit. Tegyük fel, hogy a fényforrás a P pontban van, és legyen $O_1O_2 = d$, illetve $O_1P = x$.



A feladat fizikai tartalma miatt feltesszük, hogy a

(1) $$d > r + R$$

és

$$r \le x \le d - R$$

feltételek teljesülnek. Mivel a gömbsüveg felszíne $2\pi r \cdot m$, az $F(x) = 2\pi(M \cdot R + m \cdot r)$ függvény maximumát keressük az (1) és (2) feltétel mellett. Az O_1PA és O_1AP_1 háromszögek hasonlóságából $\frac{r}{x} = \frac{r-m}{r}$ amiből $m = r - \frac{r^2}{x}$. Hasonlóan kapjuk, hogy $M = R - \frac{R^2}{d-x}$, és így

(3) $$F(x) = 2\pi(R^2 + r^2) - 2\pi\left(\frac{r^3}{x} + \frac{R^3}{d-x}\right).$$

3)-ból látjuk, hogy $F(x)$ éppen akkor maximális, ha $G(x) = \frac{r^3}{x} + \frac{R^3}{d-x}$ minimális. Ilyenkor vagy $x = r$, vagy $x = d - R$, vagy pedig $G'(x) = \frac{R^3}{(d-x)^2} - \frac{r^3}{x^2} = 0$ teljesül.

Az utóbbi pontosan akkor következik be, ha

(4) $$x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{R^3}{r^3}}}.$$

Ha a (4) szerinti x teljesíti a (2) feltételt, azaz

(5) $$r \le \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{R^3}{r^3}}} \le d - R,$$

akkor a $G''(x) = 2\left(\frac{r^3}{x^3} + \frac{R^3}{(d-x)^3}\right)$ második derivált az x pontban pozitív, $G(x)$-nek tehát lokális minimuma van ezen a helyen, $F(x)$-nek pedig lokális maximuma. (5)-ben a bal oldali egyenlőtlenség

(6) $$d \ge r + R\sqrt{\frac{R}{r}},$$

míg a jobb oldali

(7) $$d \ge R + r\sqrt{\frac{r}{R}}$$

alakba írható.

Az általánosság megszorítása nélkül feltehetjük, hogy $r \le R$. Ekkor láthatjuk, hogy (6) az (1)-nél szigorúbb feltétel, (7) pedig annál gyengébb, tehát elhagyható. Ha a (6) feltétel nem teljesül, akkor $d < R + R\sqrt{\frac{R}{r}}$, tehát

(8) $$x = \frac{d}{1 + \sqrt{\frac{R^3}{r^3}}} < r.$$

Az x helyen $G''(x)$ most is pozitív, $G(x)$-nek lokális minimuma lesz, $F(x)$-nek pedig lokális maximuma, de x most nem teljesíti a (2) feltételt. A (2)-nek megfelelő intervallumon így (8) következtében $F(x)$ monoton csökken, maximumát tehát az intervallum bal végpontjában, $x = r$ helyen veszi fel.

Azt találtuk tehát, hogy ha az (1) feltételen túl (6) is teljesül, akkor $x = \dfrac{d}{1+\sqrt{\dfrac{R^3}{r^3}}}$ esetén lesz a megvilágított felületek összege a legnagyobb. Ha pedig $r + R < d < r + R\sqrt{\dfrac{R}{r}}$, akkor $x = r$ mellett kapjuk a maximumot. Utóbbi esetben (és akkor is, ha (6)-ban egyenlőség áll) a P pont a kisebb sugarú gömbön lesz, és így ezen a gömbön a megvilágított felületek nagysága zérus.

Speciálisan, ha $r = R$, a megvilágított felületek összege akkor lesz maximális, ha $x = \dfrac{d}{2}$.

Kovács Vera (Szolnok, Verseghy F, Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján