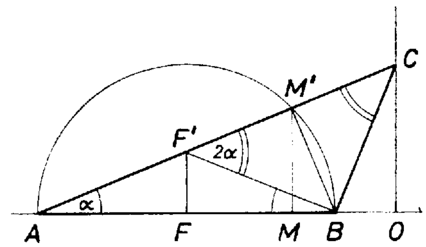
I. megoldás. Legyen először $OB=0$. Ekkor az O pont nem megoldás, mert a $BOA\sphericalangle$ határozatlan. Az egyetlen megoldás most az a C pont lesz, amelyre $CAB\sphericalangle=30^\circ$ és $ACB\sphericalangle=60^\circ$. Ez a C pont könnyen megszerkeszthető.

Ha $OB>0$, akkor az O pont nyilván megoldás lesz, mert $BOA\sphericalangle=2BAO\sphericalangle=0^\circ$, és így az O pontra teljesül a megkövetelt feltétel.



1. ábra

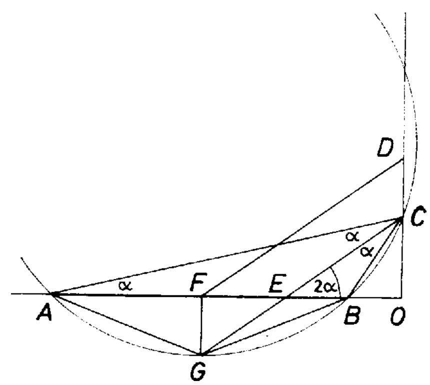
Keressünk ezután olyan C pontot, amely a derékszög másik szárán van, és O-tól különböző. Szerkesszük meg AB Thalész-körét, melynek középpontja legyen F. Az OF felezőmerőlegese messe a Thalész-kört az M' pontban. Állítjuk, hogy AM' a derékszög másik szárát a szerkesztendő C pontban metszi. Az 1. ábra jelöléseit használva láthatjuk, hogy $OFF'C$ derékszögű trapéz, amelynek középvonala MM'. Ezért $CM'=M'F'$. A Thalész-kör folytán pedig BM' merőleges CF'-re, tehát a BCF' háromszög egyenlő szárú. Ugyancsak egyenlő szárú az ABF' áromszög, amelynek A-nál levő szögét α-val jelölve $BCF'\sphericalangle=BF'C\sphericalangle=2\alpha$. Így C valóban a kívánt tulajdonságú pont.

Ez a C pont csak akkor létezik, ha $OM>OB$, azaz

$$\frac{OB+BF}{2}>OB,\quad \text{vagyis}\quad AB>2OB.$$

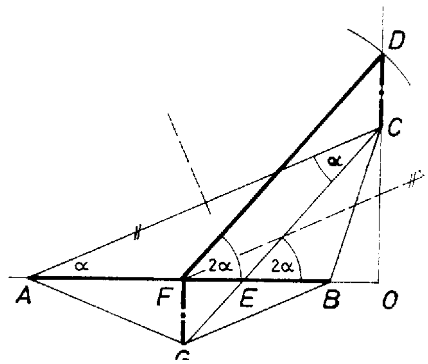
Megfordítva, ha $AB>2OB$, akkor $OM>OB$, ahol M az OF felezőpontja. Így létezik OF felezőmerőlegesének és AB Thalész-körének (félkör) M' metszéspontja, és AM', valamint a derékszög másik szárának C metszéspontja is, a fenti meggondolásunk szerint ekkor $BCA\sphericalangle=2BAC\sphericalangle$ teljesül.

Székely-Doby András (Bp., Petőfi S. Gimn., IV. o. t.)
dolgozata alapján



2. ábra

II. megoldás. Használjuk a 2. ábra jelöléseit. A speciális eseteket az I. megoldáshoz hasonlóan vizsgálhatjuk. Tegyük fel, hogy a derékszög másik szárán létezik a kívánt tulajdonságú, O-tól különböző C pont. Ekkor az ABC háromszög C-nél levő belső szögének felezője felezi a háromszög köré írt kör C-t nem tartalmazó AB ívét. Feltételeink szerint az ábrán α-val jelölt szögek egyenlők, és ezért a kerületi szögek tétele szerint $AG=GB=BC$, továbbá $GAB\sphericalangle=GBA\sphericalangle=BGC\sphericalangle=\alpha$, ami azt jelenti, hogy $AGBC$ szimmetrikus trapéz. De akkor átlói egyenlők, azaz $AB=GC$. Toljuk el a GC szakaszt GF távolsággal, így kapjuk azFD szakaszt. Mivel az AEC háromszög E-nél levő külső szöge 2α, ezért FD is 2α szöget zár be AB-vel. Ezután megállapíthatjuk, hogy ha C megszerkeszthető, akkor megszerkeszthető az AB-vel azonos hosszúságú FD segítségével a D pont is, és $FD>FO$, azaz $AB>\dfrac{AB}{2}+BO$, amiből $AB>2OB$ a szerkeszthetőség szükséges feltétele. Megmutatjuk, hogy ez a feltétel elegendő is.



3. ábra

Tegyük fel ugyanis, hogy $AB > 2OB$. Az F köré rajzolt AB sugarú kör messe a derékszög másik szárát D-ben. A $DFO\sphericalangle = 2\alpha$ felezőjével – a 3. ábrán szaggatott vonallal szerepel – A-n át húzott párhuzamos a derékszög másik szárát egy C pontban metszi. Toljuk el FD-t DC-vel, így kapjuk F képeként a G pontot. Messe GC az AB egyenest az E pontban. Az eltolás miatt $CEO\sphericalangle = 2\alpha$, és mivel ez a szög az AEC háromszög külső szöge, $ECA\sphericalangle = \alpha$. Ez azt jelenti, hogy AB és CG az AC felezőmerőlegesére szimmetrikus szakaszok, vagyis $AGBC$ szimmetrikus trapéz, ami köré kör írható. A kerületi szögek tétele szerint $GCB\sphericalangle = \alpha$, tehát $BCA\sphericalangle = 2\alpha$. Ezért C a szerkesztendő pont.

III. megoldás. A speciális esetek vizsgálatát mellőzzük. A szerkesztést számítás alapján fogjuk elvégezni. Legyen $OC = x$, $OA = a$ és $OB = b$. A 2. ábra alapján $CBO\sphericalangle = 3\alpha$, továbbá

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{x}{b}, \quad \operatorname{tg}\alpha = \frac{x}{a}.$$

A

$$\operatorname{tg} 3\alpha = \frac{3\cdot\operatorname{tg}\alpha - \operatorname{tg}^3\alpha}{1 - 3\cdot\operatorname{tg}^2\alpha}$$

azonosság miatt így

$$\frac{x}{b} = \frac{3\cdot\frac{x}{a} - \frac{x^3}{a^3}}{1 - 3\cdot\frac{x^2}{a^2}},$$

innen pedig $x = 0$, vagy

$$x = a\sqrt{\frac{a-3b}{3a-b}},$$

ami megszerkeszthető.

A megoldhatóság feltétele: $a > 3b$, azaz $AB > 2OB$.