Jelöljünk ki az egységkör kerületén egy K kezdőpontot. A kör minden X pontját megfeleltethetjük annak a nemnegatív és 2π-nél kisebb x valós számnak, amelyre $XOK\sphericalangle = x$ (ahol O az egységkör középpontja). Jelöljük K'-vel K átellenes pontját a körön. Nyilvánvaló, hogy tetszőleges X kerületi pontra az XK és az XK' ívtávolságok összege éppen π (a rövidebb XK ív és a rövidebb XK' ív együtt éppen az egyik KK' félkörívet adja és X-en kívül nincs közös pontjuk. Ha tehát két átellenes pontot adunk meg a kör kerületén, akkor a körkerület tetszőleges pontjának e két ponttól vett ívtávolság-átlaga $\frac{\pi}{2}$. A feladatban szereplő α értéke így csak $\alpha = \frac{\pi}{2}$ lehet. (Megjegyezzük, hogy ha n páros, és az n pontot úgy adjuk meg a kerületen, hogy egy szabályos n-szög csúcsai legyenek, akkor is igaz, hogy a körkerület minden pontjának az n ponttól vett ívtávolság-átlaga $\frac{\pi}{2}$, hiszen az n pont tükrös a kör középpontjára.)

Most megmutatjuk, hogy ha B_1, B_2, $\ldots$, B_n tetszőleges pontok a körön, mindig található ott olyan X pont, amelynek a B_i pontoktól vett ívtávolság-átlaga pontosan $\frac{\pi}{2}$. Jelöljük $f_i(x)$-szel annak az X pontnak B_i-től vett ívtávolságát, amelyre $XOK\sphericalangle = x$. Ha x végigfut a $0^\circ \le x \le \pi$ zárt intervallumon, akkor a megfelelő X pont végigfut a „pozitív" félsíkba eső KK' félköríven. Eközben $f_i(x)$ folytonosan változik. Ha ugyanis B_i a „pozitív" félsíkban van, akkor $f_i(x) = |x - b_i|$, ahol $b_i = B_iOK\sphericalangle$, $(0^\circ \le b_i \le \pi)$, ha pedig a „negatív" félsíkban van, akkor $f_i(x) = \pi - |\pi + x - b_i|$; f_i tehát valóban folytonos függvény.

Egy X pontnak a B_1, B_2, $\ldots$, B_n pontoktól vett ívtávolság-átlaga nyilván

$$\mathrm{g}(x) = \frac{1}{n}\big(f_i(x) + f_2(x) + \ldots + f_n(x)\big),$$

ahol $0 \le x \le \pi$ és $XOK\sphericalangle = x$. Nyilván $\mathrm{g}(x)$ is folytonos függvény. Végül megmutatjuk,hogy $\mathrm{g}(0) + g(\pi) = \pi$. Ehhez elegendő, ha minden i-re $f_i(0) + f_i(\pi) = \pi$, azaz tetszőleges B_i pontnak a K és K' ponttól vett ívtávolság-összege π, amit viszont már beláttunk.

Ha most $\mathrm{g}(0) = \frac{\pi}{2}$, akkor $\mathrm{g}(\pi) = \frac{\pi}{2}$, így K-nak is, K'-nek is $\frac{\pi}{2}$ az ívtávolság-átlaga B_1, B_2, $\ldots$, B_n, pontoktól. Ha pl. $\mathrm{g}(0) < \frac{\pi}{2}$, akkor $\mathrm{g}(\pi) = \pi - \mathrm{g}(0) > \frac{\pi}{2}$ és ekkor g folytonossága miatt van olyan $0 < x < \pi$ szám, amelyre $\mathrm{g}(x) = \frac{\pi}{2}$, tehát a megfelelő X pontnak a B_1, B_2, $\ldots$, B_n pontoktól vett ívtávolság-átlaga $\frac{\pi}{2}$. (Megjegyezzük, hogy az X pont ekkor a KK' „pozitív" félkörív *belsejében* van, és a kört „megfordítva" a másik félkörív belsejében is találunk egy megfelelő X' pontot. Azt is megmutattuk tehát, hogy mindig legalább két pont van a kör kerületén, amelynek az adott pontoktól vett ívtávolság-átlaga $\frac{\pi}{2}$.)

Megjegyzés. Bizonyításunkban a körről csak azt használtuk fel, hogy önmagát nem metsző, zárt, folytonos görbe, amelynek bármely két pontja közötti ívnek van egyértelmű (véges) hosszúsága. (Az utóbbi feltétel nem mellékes : a híres „hópehelygörbe" olyan önmagát nem metsző, zárt, korlátos – egy kör belsejében elférő – folytonos görbe, amelynek bármely két pontja közötti mindkét ív végtelen hosszú.) Ha G ilyen, ún. rektifikálható, zárt, önmagát nem metsző folytonos görbe, akkor pontosan egy olyan szám van, amelyre igaz, hogy akárhogyan adunk meg a görbén véges sok pontot, létezik G-n olyan X pont, amelynek a pontoktól vett ívtávolság-átlaga α. (Az X és Y kerületi pontok ívtávolságán a rövidebb $\widehat{XY}$ ív hosszát értjük.) Ez az α érték a G görbe g hosszának a negyede. A bizonyítás most is azon múlik, hogy az ívtávolság folytonosan változik, és ha K, K' a G görbe „átellenes" pontjai (vagyis K és K'-t a G görbén két $\mathrm{g}/2$ hosszú ív köti össze), akkor bármely pontnak e két ponttól vett ívtávolság-átlaga ugyanaz: $\frac{\mathrm{g}}{4}$.

Harcos Gergely (Bp., Apáczai Cs. J. Gyak. Gimn., III. o. t.)