

Első  $n$  négyzetszámnak az  $1^2, 2^2, \dots, n^2$  számokat tekintjük. Az első  $n$  négyzetszám összege  $\frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ ; és ha  $n = 4k + 1$  vagy  $4k + 2$  alakú, akkor ez a szám páratlan, így ilyenkor biztosan nem osztható két egyenlő összegű csoportba az első  $n$  négyzetszám. Próbálgatással látható, hogy ez  $n = 3, 4$  esetén sem lehetséges. Beosztható viszont  $n = 7, 8, 11, 12$  esetén, hiszen  $1^2 + 2^2 + 4^2 + 7^2 = 3^2 + 5^2 + 6^2$ ,  $1^2 + 4^2 + 6^2 + 7^2 = 2^2 + 3^2 + 5^2 + 8^2$ ,  $1^2 + 3^2 + 4^2 + 5^2 + 9^2 + 11^2 = 2^2 + 6^2 + 7^2 + 8^2 + 10^2$ , és  $1^2 + 3^2 + 7^2 + 8^2 + 9^2 + 11^2 = 2^2 + 4^2 + 5^2 + 6^2 + 10^2 + 12^2$ . Másrészt az  $(n+1)^2 - n^2 = 2n+1$ , és  $(n+3)^2 - (n+2)^2 = 2n+5$  azonosságokból adódik, hogy

$$(n+3)^2 - (n+2)^2 - (n+1)^2 + n^2 = 4 = (n+7)^2 - (n+6)^2 - (n+5)^2 + (n+4)^2,$$

tehát

$$n^2 + (n+3)^2 + (n+5)^2 + (n+6)^2 = (n+1)^2 + (n+2)^2 + (n+4)^2 + (n+7)^2;$$

vagyis nyolc egymás utáni négyzetszám mindig két csoportba osztható úgy, hogy az azonos csoportbeliek összege egyenlő legyen. Így az is igaz, hogy ha az első  $n$  négyzetszám két egyenlő összegű csoportba osztható, akkor az első  $n+8$  is. Ebből viszont következik, hogy minden  $8k+7, 8k+8, 8k+11, 8k+12$  alakú  $n$ -re ( $k \geq 0$ ) az első  $n$  négyzetszám két egyenlő összegű csoportba osztható. Tehát  $k \geq 1$  esetén minden  $4k+3$  és  $4k+4$  alakú  $n$ -re két egyenlő összegű csoportba sorolható az első  $n$  négyzetszám (mégpedig úgy, hogy mind a két csoportba ugyanannyi, vagy egy híján ugyanannyi szám kerül) más  $n$ -ekre pedig nem.

*Harcos Gergely* (Bp., ELTE Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)