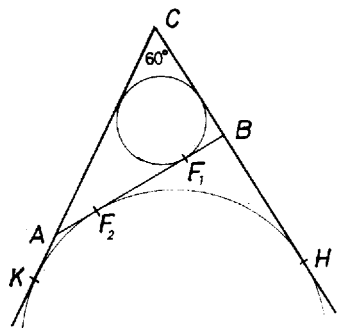
I. megoldás. Legyen a kúp csúcsa C, az ellipszis nagytengelye $AB = 2a$, a kistengely $2b$, a fókuszok F_1 és F_2, $F_1F_2 = 2c$, a leghosszabb alkotó AC, a legrövidebb BC. Szerkesszük meg azt a két gömböt, amelyek érintik a kúpfelület minden alkotóját és az ellipszis síkját. Ezek az úgynevezett *Dandelin-gömbök* a metsző síkot az ellipszis fókuszaiban érintik. (Ennek a ténynek a bizonyítását megtalálhatjuk *Hajós György:* Bevezetés a geometriába című könyvének 398. oldalán, vagy a gimnáziumi fakultatív B változatú Matematika IV. tankönyv – szerzője Hajnal Imre – 462. oldalán.)



1. ábra

Az ellipszis tengelyeire fennáll, hogy

$$(2b)^2 = (2a)^2 - (2c)^2. \tag{1}$$

A feladat állítását úgy mutatjuk meg, hogy kiszámítjuk (1) jobb oldalának két tagját. A koszinusztétel szerint

$$(2a)^2 = AB^2 = AC^2 + BC^2 - AC \cdot BC. \tag{2}$$

Az 1. ábra jelölései szerint, felhasználva, hogy a körhöz külső pontból húzott érintőszakaszok egyenlő hosszúak,

$$2c = BF_2 - BF_1 = BH - AF_2 = (CH - BC) - (CK - AC) = AC - BC.$$

Ezért

$$(2c)^2 = AC^2 + BC^2 - 2 \cdot AC \cdot BC. \tag{3}$$

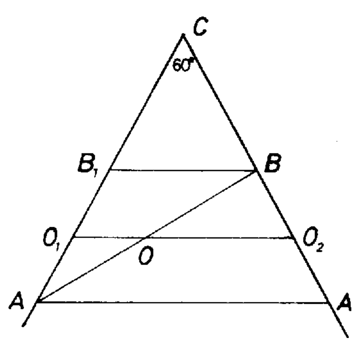
(2) és (3) összevetésével

$$(2a)^2 - (2c)^2 = AC \cdot BC,$$

ahonnan (1) szerint valóban

$$(2b)^2 = AC \cdot BC.$$

Pór Attila (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.)
megoldása nyomán



2. ábra

II. megoldás. A 2. ábrán AB az ellipszis nagytengelye, O a középpontja. Használjuk az ábra további jelöléseit is. Tekintsük a B-n, O-n, ill. A-n átmenő, a forgáskúp tengelyére merőleges síkokat. Ezek a síkok a kúpfelületet körökben metszik, és az O_1O_2 átmérőjű körnek az O ponton átmenő, O_1O_2-re merőleges húrja éppen az ellipszis $2b$ kistengelye. A magasságtétel szerint b mértani közepe az O_1O, O_2O szakaszoknak, azaz

$$b^2 = O_1O \cdot O_2O. \tag{4}$$

Mivel O az AB felezőpontja, ezért

$$O_1O = \frac{BB_1}{2} = \frac{BC}{2}, \quad O_2O = \frac{AA_1}{2} = \frac{AC}{2},$$

tehát (4)-ből

$$AC \cdot BC = 4 \cdot O_1O \cdot O_2O = 4b^2.$$