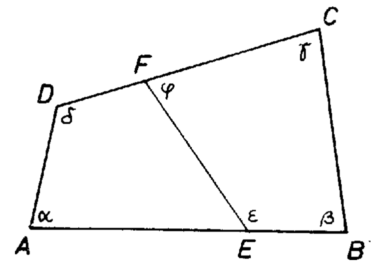
Először azt mutatjuk meg, hogy ha egy konvex négyszöget szét lehet vágni egy egyenessel két hasonló négyszögre, akkor az trapéz. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. A két négyszög hasonlóságából következik, hogy csúcsaikat egy körüljárás szerint felsorolva, azok úgy feleltethetők meg egymásnak, hogy az egy máshoz rendelt csúcsoknál fekvő szögek megegyeznek.



1. ábra

Az összes lehetséges esetet úgy találhatjuk meg, hogy pl. az $AEFD$ négyszög A csúcsához hozzárendeljük a másik négyszög egy csúcsát – ez négyféle lehetőség – az E, F, D pontokhoz pedig rendre az A-hoz rendelt pontot valamelyik körüljárás szerint követő pontokat rendeljük. Mivel két irányban járhatjuk körül a második négyszöget, összesen $2\cdot 4=8$ eset lesz.

1. Az $AEFD$, $EBCF$ hasonlóságban A képe E, E képe B, F képe C és D képe F. Ezért $\alpha=\varepsilon$, $180^\circ-\varepsilon=\beta$, tehát $\alpha+\beta=180^\circ$; az eredeti négyszög trapéz.

2. $AEFD$, $EFCB$, hasonlóságban $\alpha=\varepsilon$, $180^\circ-\varepsilon=\varphi$, $180^\circ-\varphi=\gamma$, $\delta=\beta$. Ezekből $\alpha=\gamma$ és $\delta=\beta$, tehát az eredeti négyszög most paralelogramma, és így trapéz is.

3. Ha $AEFD\sim BCFE$, akkor a $\alpha=\beta$, $180^\circ-\varepsilon=\gamma$, $180^\circ-\varphi=\varphi$, $\delta=\varepsilon$. Ezért most $\delta+\gamma=180^\circ$, tehát a négyszög trapéz.

4. $AEFD\sim BEFC$, ekkor $\alpha=\beta$, $180^\circ-\varepsilon=\varepsilon$, $180^\circ-\varphi=\varphi$, $\delta=\gamma$. Ebből $\alpha+\delta=\beta+\gamma$, így $\alpha+\delta=180^\circ$, a négyszög trapéz.

5. $AEFD\sim CFEB$, ekkor $\alpha=\gamma$, $180^\circ-\varepsilon=\varphi$, $180^\circ-\varphi=\varepsilon$, $\delta=\beta$. Az előbbi esethez hasonlóan $\alpha+\delta=180^\circ$.

6. $AEFD\sim CBEF$, akkor $\alpha=\gamma$, $180^\circ-\varepsilon=\beta$, $180^\circ-\varphi=\varepsilon$, $\delta=\varphi$. A második és harmadik összefüggésből $\varphi=\beta$, ezért ismét $\alpha+\delta=\beta+\gamma=180^\circ$.

7. $AEFD\sim FEBC$, így $\alpha=\varphi$, $180^\circ-\varepsilon=\varepsilon$, $180^\circ-\varphi=\beta$, $\delta=\gamma$. Az első és harmadik egyenlőségből $\alpha+\beta=180^\circ$, ezért a négyszög trapéz.

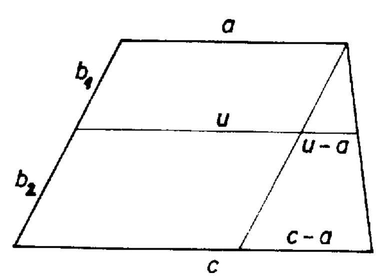
8. $AEFD\sim FCBE$, ekkor $\alpha=\varphi$, $180^\circ-\varepsilon=\gamma$, $180^\circ-\varphi=\beta$, $\delta=\varepsilon$. Az előző esethez hasonlóan most is $\alpha+\beta=180^\circ$.

Mindegyik esetben azt láttuk tehát, hogy az eredeti négyszög szükségképpen trapéz.

Ezután nézzük az állítás „akkor” részét. Bebizonyítjuk, hogy minden trapéz egy egyenessel két hasonló trapézra vágható. A 2. ábra alapján a hasonlóság *szükséges* feltétele:

$$\frac{a}{u}=\frac{u}{c},\quad \text{azaz}\quad u^2=a\cdot c. \tag{1}$$

Ilyen u hosszúságú párhuzamos szakasz az a és c hosszúságú alapok között nyilván létezik. Ha $a\neq c$, akkor pontosan egy ilyen szakasz húzható, $a=c$ esetén pedig bármely „középpárhuzamos” megfelelő.



2. ábra

A hasonlósághoz *elegendő* lesz, ha az egyértelműen adódó, ill. alkalmasan választott b_1, b_2 szakaszokra teljesül, hogy

$$\frac{b_2}{b_1}=\frac{u}{a}, \tag{2}$$

hiszen a 2. ábra két részeként létrejött trapézokban a megfelelő szögek egyenlők.

Ha $a = c = u$, akkor nyilván $b_1 = b_2$ megfelel. Tegyük fel, hogy $a \neq c$, ekkor

$$\frac{c-a}{u-a} = \frac{b_1 + b_2}{b_1},$$

azaz

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c-a}{u-a} - 1. \tag{3}$$

Helyettesítsük be (1)-et (3)-ba, így

$$\frac{b_2}{b_1} = \frac{c-a}{\sqrt{ac}-a} - 1 = \frac{(c-a)(\sqrt{ac}+a)}{ac-a^2} - 1 = \frac{\sqrt{ac}+a}{a} - 1 = \frac{\sqrt{ac}}{a} = \frac{u}{a},$$

tehát az (1) feltétel ebben az esetben elegendő is a két trapéz hasonlóságához.