

A feladat eredeti szövegében nem szerepelt kifejezetten, hogy a számegyenes önmagára való leképezését keressük. Ezért elfogadtuk azokat a megoldásokat is, amelyek a számegyenest a sík egy másik egyenesére képezték le. Az alábbi megoldásban $f(x)$ a számegyenes önmagára való leképezését jelenti.

Az $f(x)$ -re szóló feltételek szerint $a(ax + b) + b = x$, azaz $(a^2 - 1)x + b(a + 1) = 0$ fennáll, minden valós x -re. Ez pontosan akkor teljesül, ha

$$(1) \quad a^2 - 1 = 0$$

és

$$(2) \quad b(a + 1) = 0.$$

(1)-ből $a = 1$ vagy $a = -1$.

Ha $a = 1$, akkor (2)-ből $b = 0$. Ekkor $f(x) = x$, amely az identikus leképezés.

Ha $a = -1$, akkor (2)-ből b tetszőleges valós szám. Ebben az esetben

$$(3) \quad f(x) = -x + b.$$

Milyen önmagára való leképezése ez a számegyenesnek? Könnyen belátható, hogy az x és $-x + b$ koordinátájú pontok

szimmetrikusak a $\frac{b}{2}$ pontra, hiszen $\frac{x + (-x + b)}{2} = \frac{b}{2}$.

Ezért a (3) leképezés a $\frac{b}{2}$ pontra való középpontos tükrözés az egyenesen.

A feladat kérdésére tehát azt válaszolhatjuk, hogy $f(x)$ vagy a helybenhagyás, vagy a $\frac{b}{2}$ koordinátájú pontra való tükrözés.

Megjegyzés. Feladatunkban a következő tulajdonságú leképezés szerepel: Ha az egyenes P pontjának képe Q , akkor a Q pont képe P . Ez másképpen szólva azt jelenti, hogy a leképezés megegyezik az inverzével. Az egyenes ilyen önmagára való (nem identikus) leképezését involúciónak nevezzük. Involúció például az egyenesnek az $f(x) = \frac{a}{x}$ a hozzárendeléssel történő leképezése is.