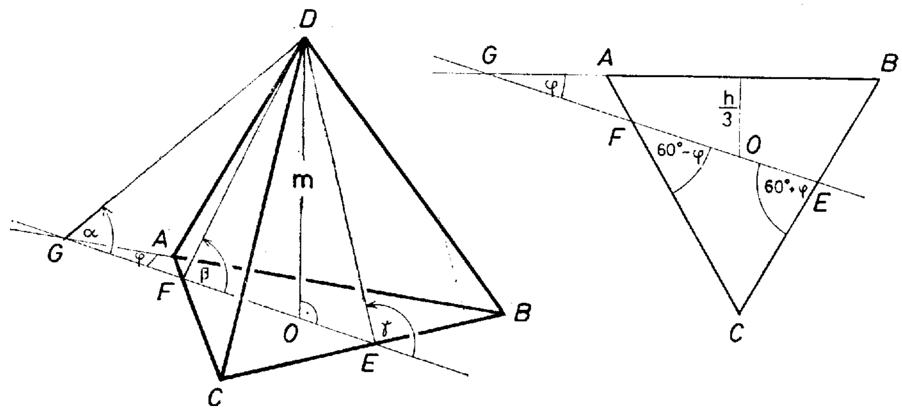
Legyenek a szabályos tetraéder alaplapjának csúcsai A, B, C, a negyedik csúcsa D. Ismeretes, hogy ha egy síkot két másik, egymással párhuzamos síkkal metszünk, a kapott metszésvonalak párhuzamosak lesznek. Ezért a metsző síkot felvehetjük a D csúcson keresztül is, ettől α, β, γ nem változnak. Ekkor az ABC alaplappal képezett metszésvonal átmegy az ABC háromszög magasságpontján. Messe ez a metszésvonal például a BC oldalt E-ben, AC-t F-ben, AB egyenesét pedig G-ben. Legyen a tetraéder magassága m, az alapháromszögé h, és jelöljük az EGB szöget φ-vel. Utóbbi jelölésünkkel – mint az a jobb oldali ábráról látható – $CFE\sphericalangle = 60^\circ - \varphi$, és $CEF\sphericalangle = 60^\circ + \varphi$.



A bal oldali ábra alapján

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{DO}{GO},\ \text{a jobb oldali ábra alapján pedig } GO = \frac{h}{3 \cdot \sin\varphi}.$$

Ezért

$$\mathrm{tg}\ \alpha = \frac{3m}{h} \cdot \sin\varphi. \tag{1}$$

Hasonlóan

$$\mathrm{tg}\ \beta = \frac{DO}{FO},\ \text{és } FO = \frac{h}{3 \cdot \sin(60^\circ - \varphi)},$$

ezért

$$\mathrm{tg}\ \beta = \frac{3m}{h} \cdot \sin(60^\circ - \varphi), \tag{2}$$

$$\mathrm{tg}\ \gamma = -\frac{3m}{h} \cdot \sin(60^\circ + \varphi), \tag{3}$$

ahol figyelembe vettük, hogy esetünkben γ tompaszög.

Azt kell bizonyítanunk, hogy

$$\mathrm{tg}\ \alpha + \mathrm{tg}\ \beta + \mathrm{tg}\ \gamma = 0,$$

azaz

$$\frac{3m}{h}[\sin\varphi + \sin(60^\circ - \varphi) - \sin(60^\circ + \varphi)] = 0. \tag{4}$$

Ismert azonosság szerint

$$\sin(60^\circ - \varphi) - \sin(60^\circ + \varphi) = -2 \cdot \cos 60^\circ \cdot \sin\varphi = -\sin\varphi,$$

tehát (4) igaz. (Eljárásunk természetesen akkor is alkalmazható, ha az alaplapra illeszkedő metszésvonal átmegy valamelyik csúcson.)

Megjegyzés. A feladat állítása csak akkor igaz, ha az α, β, γ szögeket alkalmasan irányítjuk. Ezt úgy tettük meg, hogy az O és E pontokat tartalmazó egyenest irányított egyenesnek tekintettük, és α, β, γ az irányított egyenessel bezárt szöget jelentette.