Mivel az első transzformáció szerint A képe B, B képe A, és C fixpont,

$$AC = BC. \tag{1}$$

Jelöljük a második transzformációval létesített hozzárendelést nyíllal: ekkor

$$\begin{aligned} &A \to B\\ &B \to C\\ &C \to D\\ &D \to E\\ &E \to A, \quad \text{és így} \end{aligned}$$

$$\begin{cases} AB \to BC\\ BC \to CD\\ CD \to DE\\ DE \to EA, \end{cases} \tag{2}$$

és mivel ez egybevágósági transzformáció,

$$AB = BC = CD = DE = EA. \tag{3}$$

(2)-höz hasonlóan kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} &AC \to BD\\ &BD \to CE\\ &CE \to DA\\ &DA \to EB, \end{aligned}$$

amiből

$$AC = BD = CE = DA = EB. \tag{4}$$

Az (1) egyenlőség miatt a (3) és (4)-ben szereplő összes szakaszok egyenlőek, tehát az A, B, C, D, E pontok közül bármelyik kettő távolsága megegyezik. Ez azt jelentené, hogy $ABCD$ és $ABCE$ szabályos tetraéderek. A két tetraéder ABC lapja közös, ezért D és E vagy egybeesnek, vagy tükrösek az ABC lap síkjára. Ha $D = E$, akkor mind az öt pont egybeesik, és ekkor AB és CD egyaránt zérus, arányukat nem értelmezzük (bár lehetséges lenne ilyen esetben $0 : 0$ arányról beszélni).

Ha D és E tükrösek az ABC lapra, akkor DE a szabályos tetraéder magasságának kétszerese, azaz $DE = 2 \cdot AB \cdot \sqrt{\frac{2}{3}}$, ami azt jelenti, hogy $DE \neq AB$. Ez ellentmond (3)-nak, ezért az öt pont eme elrendezése nem felel meg a feltételeknek. Arra az eredményre jutottunk, hogy a feladat feltételeinek megfelelő *különböző* pontok nem léteznek a (három dimenziós) térben.

Megjegyzések. 1. Könnyű látni, hogy a síkban nem lehet felvenni négy különböző pontot úgy, hogy bármelyik kettő távolsága ugyanakkora legyen, de a térben ez lehetséges.

Matematikai absztrakció a négy dimenziós tér fogalma. Ebben értelmezhető a (három dimenziós) térbeli szabályos tetraéder általánosítása, egy olyan test, amelynek öt csúcsa van, és bármelyik két csúcsának távolsága ugyanakkora, azaz élei egyenlőek.

2. Feladatunkban – és ugyanígy a 2589. gyakorlatban is – a megoldás döntő részét annak a vizsgálata tette ki, hogy a két feltételezett transzformáció véges sokszori alkalmazásával az adott pontok (ill. az ezek által meghatározott szakaszok) milyen hozzárendelései valósíthatók meg; mindkét esetben azt találtuk, hogy bármely két pontpár átvihető egymásba. A feladatok hátterében az a tény áll, hogy ilyen módon *minden* kölcsönösen egyértelmű hozzárendelés előállítható. Általánosabban a következőt láthatjuk be: Legyenek A_1, A_2, $\ldots$, A_n tetszőleges, de egymástól különböző objektumok, és jelöljük rendre t-vel és c-vel a következő megfeleltetéseket:

(t) $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_1$, $A_3 \to A_3$, $\ldots$, $A_n \to A_n$, ill.

(c) $A_1 \to A_2$, $A_2 \to A_3$, $A_3 \to A_4$, $\ldots$, $A_n \to A_1$.

Ha B_1, B_2, $\ldots$, B_n az A_1, $\ldots$, A_n elemeket jelöli egy tetszőleges sorrendben, akkor t és c véges sokszori alkalmazásával megkaphatjuk az $A_1 \to B_1$, $A_2 \to B_2$, $\ldots$, $A_n \to B_n$ megfeleltetést.

Az állítás igazolásához először a

(t_i) $A_1 \to A_1, \ldots, A_{i-1} \to A_{i-1}$, $A_i \to A_{i+1}$, $A_{i+1} \to A_i$,

$$A_{i+2} \to A_{i+2}, \ldots, A_n \to A_n$$

megfeleltetéseket állítjuk elő (itt $1 \le i \le n-1$ és nyilván $t_1 = t$).

Könnyen látható, hogy ha először a c megfeleltetést alkalmazzuk $(n+1-i)$-szer, majd a t-t, és végül $(i-1)$-szer a c megfeleltetést, akkor eredményül éppen a t_i-hez jutunk:

$$A_i \xrightarrow[n+1-i]{c,c,\ldots,c} A_1 \xrightarrow{t} A_2 \xrightarrow[i-1]{c,c,\ldots,c} A_{i+1},$$
$$A_{i+1} \xrightarrow[n+1-i]{c,c,\ldots,c} A_2 \xrightarrow{t} A_1 \xrightarrow[i-1]{c,c,\ldots,c} A_i,$$

és $v \ne i$, $i+1$-re

$$A_v \xrightarrow[n+1-i]{c,c,\ldots,c} A_s \ (s \ne 1,2),\ A_s \xrightarrow{t} A_s,\ A_s \xrightarrow[i-1]{c,c,\ldots,c} A_v.$$

Ezután a

(t_{ij}) $A_1 \to A_1$, …, $A_i \to A_j$, …, $A_j \to A_i$, …, $A_n \to A_n$ $(i < j)$

megfeleltetéseket állítjuk elő, amelyek tehát A_i-t és A_j-t felcserélik, a többieket pedig helyben hagyják (önmaguknak feleltetik meg). Egymás után hajtsuk végre ugyanis a t_i, t_{i+1}, …, t_{j-2}, t_{j-1}, t_{j-2}, …, t_i megfeleltetéseket: az eredmény nyilvánvalóan t_{ij} lesz.

Végül egy tetszőleges B_1, B_2, …, B_n sorrend a következőképpen érhető el: ha $B_1 = A_i$, akkor t_{1i} alkalmazásával:

$$A_1 \to B_1,\ A_2 \to C_2,\ \ldots,\ A_n \to C_n.$$

($i = 1$ esetén ez a lépés természetesen kimarad.)

Ha most $C_2 = A_j$ és $B_2 = A_k$, akkor másodjára a t_{jk} leképzést végrehajtva ($j, k \ne i$ miatt):

$$A_1 \to B_1 \to B_1, A_2 \to C_2 \to B_2, A_3 \to D_3, \ldots, A_n \to D_n.$$

Az előbbiekhez hasonlóan, $D_3 = A_w$ és $B_3 = A_z$ jelöléssel w, $z \ne i$, k, így t_{wz} elvégzése után:

$$A_1 \to B_1 \to B_1 \to B_1,\ A_2 \to C_2 \to B_2 \to B_2,$$
$$A_3 \to D_3 \to B_3,\ A_4 \to E_4,\ \ldots,\ A_n \to E_n.$$

Folytatva E_4 és B_4 cseréjével, majd tovább, látható, hogy a kívánt megfeleltetés összesen legfeljebb $(n-1)$ hasonló lépésben elérhető.