I. megoldás. Először megvizsgáljuk, hogy milyen értékeket vehet fel az $a_{n+1}-a_n$ különbség. Tekintsük először a $b_n=\sqrt{(n+1)^2+n^2}$ sorozat $b_{n+1}-b_n$ különbségsorozatát, mert ez könnyebben becsülhető:

$$\begin{aligned}b_{n+1}-b_n&=\sqrt{(n+2)^2+(n+1)^2}-\sqrt{(n+1)^2+n^2}=\\&=\frac{(n+2)^2-n^2}{\sqrt{(n+2)^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n+1)^2+n^2}}=\\&=\frac{4(n+1)}{\sqrt{(n+2)^2+(n+1)^2}+\sqrt{(n+1)^2+n^2}}=\\&=\frac{4}{\sqrt{\left(1+\frac{1}{n+1}\right)^2+1}+\sqrt{1+\left(1-\frac{1}{n+1}\right)^2}},\end{aligned}$$

és itt a nevezőben a gyökjelek alatt 1-nél nagyobb, illetve 3-nál kisebb szám áll, tehát a nevező nagyobb, mint 2, és kisebb, mint $2\sqrt{3}<4$. Ezért $1<b_{n+1}-b_n<2$. Innen következik, hogy $[b_{n+1}]-[b_n]=a_{n+1}-a_n\ge 1$. Hiszen, ha két szám különbsége 1-nél nagyobb, akkor nem lehet azonos az egész részük. Másrészt $a_{n+1}-a_n<b_{n+1}-(b_n-1)=b_{n+1}-b_n+1<3$. Így azt kapjuk, hogy $a_{n+1}-a_n$ csak 1 vagy 2 lehet.

Ha $a_{n+1}-a_n$ csak véges sok esetben, mondjuk k esetben lehetne 2, különben mindig 1-nek kellene lennie, akkor $a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)+a_1\le n+k+\sqrt{5}$ lenne, ha n olyan nagy, hogy már minden 2-es különbség szerepel a jobb oldalon. Másrészt $a_{n+1}=[\sqrt{(n+2)^2+(n+1)^2}]>\sqrt{2}(n+1)$, így azt kapjuk, hogy minden, elég nagy n-re $n+k+\sqrt{5}>\sqrt{2}(n+1)$, azaz $(\sqrt{2}-1)n<k+\sqrt{5}-\sqrt{2}$.

Itt a jobb oldal rögzített szám, a bal oldal pedig plusz végtelenhez tart, ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy az $a_{n+1}-a_n$ különbség végtelen sokszor veszi fel a 2 értéket.

Most tegyük fel, hogy $a_{n+1}-a_n$ csak véges sokszor, mondjuk k esetben veszi fel az 1 értéket. Ekkor $a_{n+1}=(a_{n+1}-a_n)+(a_n-a_{n-1})+\ldots+(a_2-a_1)+\sqrt{5}=2n-k+\sqrt{5}$, ha n olyan nagy, hogy már minden 1-es különbség szerepel a jobb oldalon. De $a_{n+1}<\sqrt{2}(n+2)$, így most azt kapjuk, hogy $2n-k+\sqrt{5}<\sqrt{2}n+2\sqrt{2}$, tehát minden elég nagy n-re $(2-\sqrt{2})n<2\sqrt{2}+\sqrt{5}+k$, s ez megint ellentmondás. Így az $a_{n+1}-a_n$ különbség végtelen sokszor veszi fel az 1 értéket is. Más értéke nem lehet, ezzel a bizonyítást befejeztük.

II. megoldás. Jelöljük ismét b_n-nel $\sqrt{(n+1)^2+n^2}=\sqrt{2n^2+2n+1}$-et. Ekkor $n\ge 1$-re

$$\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)<b_n<\sqrt{2}\left(n+\frac{3}{5}\right), \tag{1}$$

hiszen $\left(\sqrt{2}\left(n+\frac{1}{2}\right)\right)^2=2n^2+2n+\frac{1}{2}<2n^2+2n+1=b_n^2<2n^2+2{,}4n+0{,}72.$

Ebből következik, hogy $b_{n+1}-b_n<\sqrt{2}\left(n+1+\frac{3}{5}-n-\frac{1}{2}\right)=\frac{11\sqrt{2}}{10}<2$ és $b_{n+1}-b_n>\sqrt{2}\left(n+1+\frac{1}{2}-n-\frac{3}{5}\right)=\frac{9\sqrt{2}}{10}>1$. Ez utóbbi egyenlőtlenség szerint $[b_{n+1}]>[b_n]$, tehát $a_{n+1}-a_n\ge 1$, míg az első egyenlőtlenség alapján $a_{n+1}-a_n<b_{n+1}-b_n+1<3$, tehát $a_{n+1}-a_n\le 2$.

Az $a_{n+1}-a_n$ különbség csak két értéket vehet tehát fel: lehet 1 és 2.

Először azt mutatjuk meg, hogy végtelen sokszor veszi fel az 1 értéket. Ehhez tekintsük a $b_{n+2}-b_n$ különbséget. Ez (1) szerint legföljebb $\sqrt{2}\left(n+2+\frac{3}{5}-n-\frac{1}{2}\right)=\sqrt{2}\cdot 2{,}1<3$, így $a_{n+2}-a_n<b_{n+2}-b_n+1<4$. Ebből következik, hogy az $a_{n+2}-a_n=(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)$ különbség legfeljebb 3. Akkor viszont az $a_{n+2}-a_{n+1}$ és az $a_{n+1}-a_n$ különbségek közül legalább az egyik 1 (különben összegük 2+2=4 volna!). Beláttuk tehát, hogy két szomszédos $a_{n+1}-a_n$ különbség között legalább az egyik 1, s így valóban végtelen sok 1 van közöttük. Hasonlóan bizonyíthatjuk, hogy három szomszédos között legalább egy esetben 2 a különbség. Ellenkező esetben ugyanis

$$a_{n+3}-a_n=(a_{n+3}-a_{n+2})+(a_{n+2}-a_{n+1})+(a_{n+1}-a_n)=3,$$

s így $b_{n+3}-b_n<a_{n+3}+1-a_n=4$ volna. De (1) szerint

$$b_{n+3}-b_n>\sqrt{2}\left(n+3+\frac{1}{2}-n-\frac{3}{5}\right)=\sqrt{2}\cdot 2{,}9>4,$$

ami ellentmondás. Ezzel beláttuk, hogy a 2 érték is végtelen sokszor fordul elő.