Ismeretes, hogy az első n természetes szám számtani közepe $\dfrac{n+1}{2}=A$. Mértani közepe nagyobb $\dfrac{n}{e}$ -nél, hiszen $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$. Így $n\geqq 3$-ra $2G>\dfrac{2n}{e}>A=\dfrac{n+1}{2}$ $\left(\text{hiszen } n\left(\dfrac{4-e}{e}\right)>1,\text{ ha } n>2\right)$.

Másrészt

$$H=\frac{n}{1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\dots+\frac{1}{n}}<\frac{n}{\ln(n+1)},$$

mert $1+\dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{3}+\ldots+\dfrac{1}{n}>\ln(n+1)$. Ha $n\geqq[e^{200}]$, akkor $n+1>e^{200}$, így $\ln\,(n+1)>200$ és $100H<\dfrac{100n}{\ln(n+1)}<\dfrac{n}{2}<A$.

Az első e^{200} pozitív egészre tehát teljesül, hogy $2G>A>100H$, s így az is, hogy $4G>A>15H$. (Ez utóbbi már az első $[e^{15}]$ számra is teljesül.)

Megjegyzés. 1. Az $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ egyenlőtlenség bizonyításához elég felhasználni, hogy minden $j\geqq 1$ egészre $\left(\dfrac{j+1}{j}\right)^j<e$, s ezért $\dfrac{(j+1)^{j+1}}{j^j}<e(j+1)$. Ha ezeket az egyenlőtlenségeket összeszorozzuk $j=1,\,2,\,\ldots,\,(n-1)$-re, akkor azt kapjuk, hogy

$$\frac{n^n}{(n-1)^{n-1}}\cdot\frac{(n-1)^{n-1}}{(n-2)^{n-2}}\cdot\frac{(n-2)^{n-2}}{(n-3)^{n-3}}\cdot\;\ldots\;\cdot\;\frac{2^2}{1}<e^{n-1}n!,$$

vagyis $\dfrac{n^n}{e^{n-1}}<n!$, ami kicsit erősebb is a szükséges $n!>\left(\dfrac{n}{e}\right)^n$ egyenlőtlenségnél.

A másik felhasznált egyenlőtlenség bizonyításához is az $1+x<e^x$, tehát $\ln(1+x)<x$ egyenlőtlenség szükséges $(x>0)$. Ha itt $x=\dfrac{1}{j}$-t írunk, akkor

$$\frac{1}{j}>\ln\left(1+\frac{1}{j}\right)=\ln\frac{j+1}{j}=\ln(j+1)-\ln j.$$

Ha most ezeket az egyenlőtlenségeket $j=1,\;2,\;\ldots,\;n$-re összeadjuk, a kívánt

$$1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n}>\ln\,(n+1)-\ln\,n+\ln\,n-\ln\,(n-1)+\ldots+-\ln\,1=$$

$$=\ln\,(n+1)-\ln\,1=\ln\,(n+1)$$

egyenlőtlenséghez jutunk.

2. A fenti megoldás gondolatmenetével az is látható, hogy ha $n\geqq[e^m]$, akkor az első n pozitív egész számra $2G>A>m\cdot H$ teljesül. Sőt, $2G$ helyett egy $\dfrac{e}{2}$-nél nem sokkal nagyobb α-val még αG is írható.

Az iménti megoldások nagyon sok szám megadását igénylik. A b) feladat megoldásához $[e^{200}]$ szám kell, s ez 87 jegyű. De még az a) rész megoldásához használt $[e^{15}]$ szám is sok: $[e^{15}]=3\,269\,017$. A II. megoldásban megmutatjuk, hogy lényegesen kevesebb szám is elegendő.

II. megoldás. Az a) pont követelményei már két számmal is teljesíthetők, ilyenek pl. $a_1=1$ és $a_2=61$. Ekkor

$$4\cdot G=4\sqrt{61}>\;A=\frac{1+61}{2}=31\;>15\cdot H=15\cdot\frac{2\cdot 61}{62}=\frac{15\cdot 61}{31},$$

hiszen $16\cdot 16>31^2>15\cdot 61$.

A b) ponthoz legyen $a_1=1$, $a_2=a_3=\ldots=a_{11}=2^{11}$. Ekkor

$$A=\frac{a_1+a_2+\ldots+a_{11}}{11}=\frac{1+10\cdot 2^{11}}{11},\quad G=\sqrt[11]{1\cdot(2^{11})^{10}}=2^{10},$$

és

$$H=\frac{11}{1+10\cdot 2^{-11}}<11.$$

Így

$$2G=2^{11}>A=\frac{1+10\cdot 2^{11}}{11}>100\cdot 11>100H.$$

A megadott 11 számra tehát teljesül a feladat követelménye.

III. megoldás. A fenti konstrukció általánosításával megmutatjuk, hogy minden pozitív m egész számhoz megadhatók olyan pozitív egészek, amelyekre

$$2G>A>m\cdot H.$$

Ez $m=100$-ra a feladat b) részét adja, amiből persze az a) rész is következik. Legyen a $a_1=1,\;a_2=a_3=\ldots=a_n=2^n$.

Ekkor
$$2G = 2\cdot\sqrt[n]{(2^n)^{n-1}\cdot 1} = 2^n > \frac{1+(n-1)2^n}{n} = A.$$
Másrészt $n \geqq 2$ esetén $A > \dfrac{n-1}{n}2^n \geqq 2^{n-1}$, s végül $H = \dfrac{n}{1+(n-1)2^{-n}} < n$. Így azt kell csak belátnunk, hogy ha m adott egész szám, akkor megadható hozzá olyan n, amelyre $2^{n-1} \geqq m\cdot n$, hiszen ekkor $A > 2^{n-1} \geqq m\cdot n > m\cdot H$ teljesül. De ismeretes, hogy az $\dfrac{n}{2^{n-1}}$ sorozat nullához tart, ha n tart a végtelenhez, így minden elég nagy n-re $2^{n-1} \geqq m\cdot n$, ezért
$$2G = 2^n > A = \frac{1+(n-1)2^n}{n} > 2^{n-1} \geqq m\cdot n > m\cdot H.$$

IV. megoldás. A feladat további élesítéseként megmutatjuk, hogy minden m pozitív egészre megadhatók úgy egész számok, hogy

$$\left(1+\frac{1}{m}\right)G \geqq A > m\cdot H \tag{1}$$

teljesüljön. A konstrukció a III. megoldás általánosítása: Legyen $a_1 = 1$, $a_2 = a_3 = \ldots = a_n = \left(1+\dfrac{1}{m}\right)^n$. Ekkor
$$\left(1+\frac{1}{m}\right)G = \left(1+\frac{1}{m}\right)\sqrt[n]{\left(\left(1+\frac{1}{m}\right)^n\right)^{n-1}\cdot 1} =$$
$$= \left(1+\frac{1}{m}\right)^n > \frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}{n} = A$$
$$\left(\text{hiszen } \left(1+\frac{1}{m}\right)^n > 1, \text{ s így } \ 1+\left(1+\frac{1}{m}\right)^n(n-1) > n\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.\right)$$

Másrészt úgy kell megválasztanunk n-et, hogy

$$A > m\cdot H \tag{2}$$

teljesüljön (ahol m rögzített pozitív egész). Ha $n \geqq 2$, akkor $\dfrac{n-1}{n} \geqq \dfrac{1}{2}$, így
$$A = \frac{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}{n} > \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n.$$
Másrészt
$$H = \frac{n}{1+(n-1)\left(1+\frac{1}{m}\right)^{-n}} < n.$$
Elég tehát belátnunk, hogy n megválasztható úgy, hogy

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n > m\cdot n \tag{3}$$

teljesüljön, hiszen a bal oldal kisebb A-nál, a jobb oldal nagyobb $m\cdot H$-nál. De ismeretes, hogy ha $\varepsilon > 0$, akkor az $\dfrac{n}{(1+\varepsilon)^n}$ sorozat nullához tart, ha n tart a végtelenhez. Innen $\varepsilon = \dfrac{1}{m}$ választással azt kapjuk, hogy az $\dfrac{n}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n}$ sorozat tart nullához, tehát minden elég nagy n-re
$$\frac{n}{\left(1+\frac{1}{m}\right)^n} < \frac{1}{2m},$$
azaz (3) minden elég nagy n re fennáll; tehát (1) is teljesül.

Ha most m et éppen 100-nak választjuk, akkor kapunk olyan n számot, amellyel $\left(1+\dfrac{1}{100}\right)G > A > 100H$, ebből pedig a feladat állítása nyilvánvalóan következik.

Pór Attila (Bp., Fazekas M. Gyak. Gimn., II. o. t.) dolgozata alapján

Megjegyzés. A (2) egyenlőtlenség közvetlenül is könnyen igazolható, ha $n \geqq 6m^2$. Ha $n \geqq 3$, akkor a binomiális tétel szerint kifejtve $\left(1+\frac{1}{m}\right)^n$-et, a negyedik tag $\binom{n}{3}\frac{1}{m^3}$. Mivel minden tag pozitív, ezért $n \geqq 3$ esetén

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{m}\right)^n > \frac{1}{2}\binom{n}{3}\frac{1}{m^3} = n\frac{(n-1)(n-2)}{2\cdot 6m^3}.$$

Elég tehát belátnunk, hogy ha $n \geqq 6m^2$, akkor $(n-1)(n-2) > 12m^4$ (ez elegendő és persze szükséges is), vagyis $(6m^2-1)(6m^2-2) = 36m^4 - 18m^2 + 2 > 12m^4$, s ez $m \geqq 1$-re valóban igaz.