

A feladat kérdésére nemleges választ kell adnunk. Bebizonyítjuk ugyanis, hogy tetszőleges 4-nél nagyobb egész  $n$  esetén létezik olyan  $n$  csúcú konvex test, amelynek csúcsaira a  $-1$ ,  $+1$  számok valamelyikét írva, az egy csúcsba futó élek másik végpontjához írt számok szorzata minden csúcs esetén  $-1$  lesz.

Legyen először  $n$  páros. Tekintsünk egy olyan gúlát, amelynek alapja  $n - 1$  oldalú szabályos sokszög, és írjunk minden csúcsra  $-1$ -et. Ilyen test  $n - 1 \geq 2$  miatt biztosan létezik. Az egy csúcsba futó élek másik végpontjához írt számok szorzata minden csúcsra  $-1$  lesz, hiszen az alap mindegyik csúcsába 3 él fut be, az alappal szemközti csúcsba pedig  $n - 1$ , ami páratlan.

Legyen ezután  $n$  páratlan. Vegyünk most egy olyan gúlát, amelynek alapja  $n - 2$  oldalú szabályos sokszög, és tükrözzük ezt a gúlát az alaplappjára. Legyen az alappal szemközti csúcs  $A$ , a tükröképe  $B$ . Világos, hogy a gúla és tükröképe együtt egy  $n$  csúcú konvex test, és  $n \geq 5$  miatt létezik ilyen test. Írjunk a  $B$  csúcsra  $+1$ -et, az összes többi csúcsra pedig  $-1$ -et. Az  $n - 2$  oldalú sokszög bármelyik csúcsába 4 él fut be, amelyek közül egynek a másik végpontjánál  $+1$  van, a többi 3 él másik végpontjánál pedig  $-1$ . Az  $A$  és  $B$  pontok mindegyikébe  $n - 2$  él fut be, és ezeknek az éleknek a másik végpontjánál  $-1$  van. Ezért a kérdéses szorzat minden csúcsra most is  $-1$ . Ezt akartuk bizonyítani.

*Harcos Gergely* (Bp., Apáczai Csere J. Gyak. Gimn., III. o. t.)