I. megoldás. A tört nevezője $N=1+2\sqrt[5]{2}-\left(\sqrt[5]{2}\right)^2$. A feladatot nyilván megoldottuk, ha találunk olyan $a_0+a_1\sqrt[5]{2}+a_2\left(\sqrt[5]{2}\right)^2+a_3\left(\sqrt[5]{2}\right)^3+a_4\left(\sqrt[5]{2}\right)^4=s$ számot, amellyel N-et megszorozva 1-et kapunk, és a_0, a_1, a_2, a_3, a_4 racionális. Az $s\cdot N$ szorzást elvégezve $b_0+b_1\sqrt[5]{2}+b_2\left(\sqrt[5]{2}\right)^2+b_3\left(\sqrt[5]{2}\right)^3+b_4\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$ alakú számot kapunk, ahol $b_0=a_0-2a_3+4a_4$ (mert az összeszorzásnál racionális tagot 1 és a_0; $-\left(\sqrt[5]{2}\right)^2$ és $a_3\cdot\left(\sqrt[5]{2}\right)^3$, valamint $2\sqrt[5]{2}$ és $a_4\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$ összeszorzásából kapunk), $b_1=a_1+2a_0-2a_4$, (mert „racionálisszor $\sqrt[5]{2}$" alakú tagot 1 és $a_1\sqrt[5]{2}$; $2\sqrt[5]{2}$ és a_0, valamint $-\left(\sqrt[5]{2}\right)^2$ és $a_4\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$ összeszorzásából kapunk), hasonlóan $\left(\sqrt[5]{2}\right)^2$ szorzója $b_2=a_2+2a_1-a_0$, $\left(\sqrt{2}\right)^3$ szorzója $b_3=a_3+2a_2-a_1$, végül $\left(\sqrt[5]{2}\right)^4$ szorzója $b_4=a_4+2a_3-a_2$. Azt akarjuk, hogy a szorzat 1 legyen; ehhez elegendő, hogy $b_0=1$, $b_1=b_2=b_3=b_4=0$ legyen, azaz

$$\begin{aligned}
a_0 - \qquad\qquad 2a_3+4a_4&=1\\
2a_0+a_1 \qquad\qquad -2a_4&=0\\
-a_0+2a_1+\ a_2 \qquad\qquad &=0\\
-\ a_1+2a_2+a_3 \qquad &=0\\
-\ a_2+2a_3+\ a_4&=0.
\end{aligned}$$

Az egyenletrendszer megoldása $a_0=\dfrac{25}{161}$, $a_1=\dfrac{8}{161}$, $a_2=\dfrac{9}{161}$, $a_3=\dfrac{-10}{161}$, $a_4=\dfrac{29}{161}$, így

$$\frac{1}{1+\sqrt[5]{64}-\sqrt[5]{4}}=\frac{25+8\sqrt[5]{2}+9\sqrt[5]{4}-10\sqrt[5]{8}+29\sqrt[5]{16}}{161}.$$

II. megoldás. Vegyük észre, hogy a nevező szorzattá alakítható:

$$N=1+\sqrt[5]{64}-\sqrt[5]{4}=2-\left(\sqrt[5]{2}-1\right)=\left(\sqrt{2}+1-\sqrt[5]{2}\right)\left(\sqrt{2}-1+\sqrt[5]{2}\right)=T_1\cdot T_2.$$

Most alkalmazva az $a^5+b^5=\left(a+b\right)\left(a^4-a^3b+a^2b^2-ab^3+b^4\right)$ azonosságot, először $a=\sqrt{2}+1$, $b=-\sqrt[5]{2}$, másodszor $a=\sqrt{2}-1$, $b=\sqrt[5]{2}$ helyettesítéssel azt kapjuk, hogy

$$\frac{1}{T_1}=\frac{1}{\sqrt{2}+1-\sqrt[5]{2}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}+1\right)^4+\left(\sqrt{2}+1\right)^3\cdot\sqrt[5]{2}+\left(\sqrt{2}+1\right)^2\cdot\sqrt[5]{4}+\left(\sqrt{2}+1\right)\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}}{\left(\sqrt{2}+1\right)^5-2}$$

és

$$\frac{1}{T_2}=\frac{1}{\sqrt{2}-1+\sqrt[5]{2}}=$$

$$\frac{\left(\sqrt{2}-1\right)^4-\left(\sqrt{2}-1\right)^3\cdot\sqrt[5]{2}+\left(\sqrt{2}-1\right)^2\cdot\sqrt[5]{4}-\left(\sqrt{2}-1\right)\sqrt[5]{8}+\sqrt[5]{16}}{\left(\sqrt{2}-1\right)^5+2}.$$

Ha a két egyenlet jobb oldalán álló törtet összeszorozzuk, a nevező $\left(\sqrt{2}+1\right)^5\cdot\left(\sqrt{2}-1\right)^5+2\Big(\left(\sqrt{2}+1\right)^5-\left(\sqrt{2}-1\right)^5\Big)-4=2\Big(\left(\sqrt{2}+1\right)^5-\left(\sqrt{2}-1\right)^5\Big)-3$, s itt a zárójelben egész szám, 82 áll. A két számláló összeszorzása után az I. megoldás eredményét kapjuk.

Pócs Miklós (Bp., Evangélikus Gimn., III. o. t.)