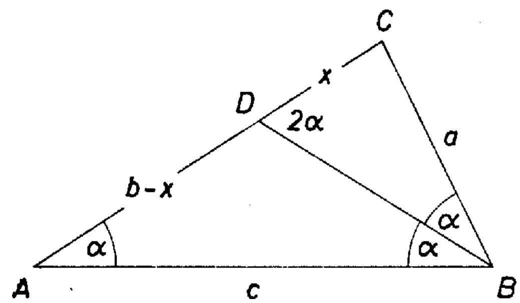
Használjuk az ábra jelöléseit. A BD szögfelező a b oldalt x és $b-x$ részekre osztja. A szögfelezőre vonatkozó tétel szerint

$$\frac{b-x}{x} = \frac{c}{a}, \quad \text{amiből}$$

(1) $$x = \frac{a \cdot b}{a+c}.$$



Az ABC és BDC háromszögek hasonlóságából $\frac{a}{b} = \frac{x}{a}$, innen (1) alapján $\frac{a}{b} = \frac{b}{a+c}$, azaz

(2) $$a^2 + ac = b^2.$$

Jelölje a és c legnagyobb közös osztóját k, ekkor

(3) $$a = ka_1, \quad c = kc_1,$$

és az a_1, c_1 számok egymáshoz relatív prímek. (2) alapján ekkor $b^2 = a^2 + ac = k^2(a_1^2 + a_1c_1)$, tehát

(4) $$a_1^2 + a_1c_1 = a_1(a_1 + c_1) = b_1^2$$

is négyzetszám, ahol nyilván $b = kb_1$. Mivel a_1-nek és c_1-nek nincs 1-nél nagyobb közös osztója, ezért a_1 és $a_1 + c_1$ is relatív prímek; ezek szorzata, b_1^2 csak úgy lehet négyzetszám, ha a_1 és $a_1 + c_1$ is négyzetszám:

$$a_1 = A^2, \quad a_1 + c_1 = B^2.$$

Ebből (3) és (4) alapján a, b, c-re azt kapjuk, hogy

(5) $$a = kA^2, \quad b = kAB, \quad c = k(B^2 - A^2).$$

Az a, b, c értékek szükségképpen pozitívak, így $k > 0$; $AB > 0$ miatt feltehető, hogy $A > 0$ és $B > 0$, és ekkor $B > A$. A háromszög-egyenlőtlenség következtében

$$k(B+A)(B-A) = k(B^2 - A^2) = c < a + b = k(A^2 + AB) = kA(A+B),$$

azaz

$$B - A < A, \quad B < 2A.$$

Az eddigi tulajdonságok együttesen már elégségesek is ahhoz, hogy az a, b, c oldalakkal rendelkező háromszög eleget tegyen a feladat feltételeinek: ha ugyanis k, A és B olyan természetes számok, amelyekre fennáll $A < B < 2A$, akkor a belőlük (5) szerint elkészített a, b, c (pozitív egész) számokra $a < b < a+c$ és $c = k(B-A)\cdot(B+A) < kA(B+A) = a+b$; a, b, c tehát valóban egy háromszög oldalai, és (5)-ből láthatóan következik (2). Mivel $a < b$, ezért az a-val szemközti szög hegyesszög. A koszinusztétel értelmében

$$\cos\alpha = \frac{c^2 + b^2 - a^2}{2bc} = \frac{c^2 + ac}{2bc} = \frac{a+c}{2b} = \frac{b}{2a},$$
$$\cos\beta = \frac{c^2 + a^2 - b^2}{2ac} = \frac{c^2 - ac}{2ac} = \frac{c-a}{2a},$$

így

$$\cos 2\alpha = 2\cos^2\alpha - 1 = \frac{b^2}{2a^2} - 1 = \frac{b^2 - 2a^2}{2a^2} = \frac{ac - a^2}{2a^2} = \frac{c-a}{2a} = \cos\beta,$$

tehát valóban $2\alpha = \beta$.

A feladat követelményeit ezek szerint azok a háromszögek elégítik ki, melyek oldalai $a = kA^2$, $b = kAB$ és $c = k(B^2 - A^2)$, ahol k, A, B pozitív egészek és $A < B < 2A$.