I. megoldás. Ha a, b, c valós számok, akkor mindhárom gyökjel alatt nemnegatív szám áll, mert az első kifejezés $(a-b)^2$ és $(a+b)^2$, a második $(b-c)^2$ és $(b+c)^2$, a harmadik pedig $(a-c)^2$ és $(a+c)^2$ közé esik. Így a feladat állítása minden a, b, c valós számhármasra értelmes. Az is világos, hogy mindkét oldal nemnegatív, így négyzetre emelhetünk, ez az egyenlőtlenség érvényén nem változtat. A négyzetreemelés és a rendezés elvégzése után a

$$2\sqrt{a^2b^2+a^2c^2+b^4+b^2c^2-ab^3-abc^2-a^2bc-b^3c+b^2ac} \geq ab+ac+bc-2b^2$$

egyenlőtlenséghez jutunk. A bal oldal mindig nemnegatív. Ha a jobb oldal negatív, akkor kész vagyunk: az egyenlőtlenség igaz. Ha pedig mindkét oldal nemnegatív, akkor négyzetre emelhetünk. Ezt elvégezve, és a kapott egyenlőtlenséget rendezve a valóban igaz

$$3(ab+bc-ac)^2 \geq 0$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezzel egyenlőtlenségünket minden esetre beláttuk. Egyenlőség pontosan akkor áll fenn, ha $ac=ab+bc$, és $ab+ac+bc-2b^2 \geq 0$.

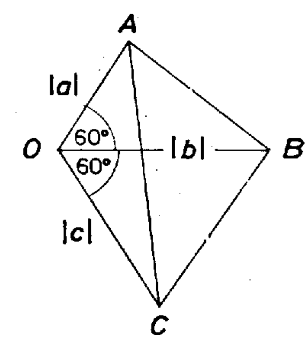
Kovács Ágnes (Jászberény, Lehel Vezér Gimn., IV. o. t.)

II. megoldás. Az egyenlőtlenséget geometriai úton bizonyítjuk. Azt fogjuk belátni, hogy ha a, b, c valós számok, akkor

$$\sqrt{|a|^2+|b|^2-|a||b|}+\sqrt{|b|^2+|c|^2-|b||c|} \geq \sqrt{|a|^2+|c|^2+|a||c|}. \tag{1}$$

Itt a bal oldal kisebb, a jobb oldal nagyobb a bizonyítandó egyenlőtlenség megfelelő oldalánál, tehát a fenti egyenlőtlenségből már következik a feladat állítása.

Az (1) belátásához tekintsünk a síkon négy pontot, O, A, B, C-t, úgy hogy $OA=|a|$, $OB=|b|$, $OC=|c|$, továbbá $AOB\sphericalangle=BOC\sphericalangle=60°$, $AOC\sphericalangle=120°$ legyen (1. ábra).



1. ábra

A koszinusz tétel szerint

$$\overline{AB}=\sqrt{OA^2+OB^2-2OA\cdot OB\cdot\cos 60°}=\sqrt{a^2+b^2-|a||b|},$$

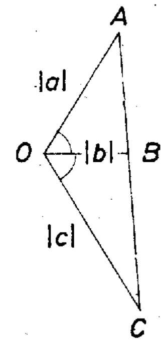
ugyanígy

$$\overline{BV}=\sqrt{b^2+c^2-|b||c|} \quad \text{és} \quad \overline{AC}=\sqrt{OA^2+OC^2-2OA\cdot OC\cos 120°}=$$
$$=\sqrt{a^2+c^2+|a||c|}.$$

Az (1) egyenlőtlenség tehát éppen az $AB+BC\geq AC$ háromszögegyenlőtlenség, s így nyilvánvalóan igaz.

Vidács Attila (Bp., Táncsics M. Gimn., III. o. t.)

Megjegyzés. Nyilvánvaló, hogy (1)-ben egyenlőség pontosan akkor áll, ha A, B, C egy egyenesbe esik (2. ábra).



2. ábra

Ekkor az OAC háromszög kétszeres területe, $|a||c|\sin 120^\circ$ egyenlő az OAB és OBC háromszögek kétszeres területének összegével, $|b|(|a|+|c|)\sin 60^\circ$-kal. Innen $|b|(|a|+|c|)=|a||c|$. Ezenkívül szükséges, hogy (1) megegyezzék a feladatbeli egyenlőtlenséggel, tehát $|a||b|=ab$, $|a||c|=ac$, $|b||c|=bc$ teljesüljön, azaz a, b és c előjele azonos legyen.