I. megoldás. A feladatot ún. kettős teljes indukcióval igazoljuk. Ez azt jelenti, hogy n-re vonatkozó teljes indukciót alkalmazunk, de ezen belül az indukciós lépést k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.

1. Kezdő lépés. $n=0$ esetén az állítás igaz, hiszen $0!=1$ és $f(0,\ k)$ minden k-ra egész ($k=0$-ra 1, $k>0$-ra 0), tehát $0!\,|\,f(0,\ k)$ igaz.

2. Indukciós lépés. Tegyük fel, hogy $f(n,\ k)$ minden k természetes számra osztható $n!$-sal, és belátjuk, hogy ebből következik, hogy $f(n+1,\ k)$ minden k természetes számra osztható $(n+1)!$-sal.

Ezt k-ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk. Ha $k=0$, akkor $f(n+1,0)=0$ osztható $(n+1)!$-sal. Most tegyük fel, hogy már beláttuk valamelyik k-ra $f(n+1,k)$ osztható $(n+1)!$-sal. Ekkor $f(n+1,k+1)=(n+1)[f(n+1,\ k)+f(n,k)]$ a definíció szerint, és itt a zárójel mindkét tagja osztható $n!$-sal (az első tag még $(n+1)!$-sal is), tehát $f(n+1,k+1)$ osztható $(n+1)\cdot n!=(n+1)!$-sal. Így beláttuk, hogy $f(n+1,k)$ minden k-ra osztható $k!$-sal, s ezzel az indukciós lépést, tehát a bizonyítást is befejeztük.

Megjegyzések. 1. A bizonyítás azt is megmutatta, hogy $f(n,k)$ minden (n,k) természetes számpárra (véges sok lépésben) kiszámolható.

2. A bizonyításban alkalmazott kettős indukció esetünkben könnyen „egyszeressé” változtatható, ha az indukciót nem n, majd k, hanem $(n+k)$ szerint végezzük.

II.megoldás. Megmutatjuk, hogy az $f(n,k)$ függvénynek kombinatorikus jelentése van. Jelölje $g(n,k)$ azt a számot, ahányféleképpen az $1,\ 2,\ \ldots,\ k$ számokat pontosan n (megkülönböztetett) osztályba lehet sorolni, vagyis ahányféleképpen n csoportba lehet őket osztani úgy, hogy minden csoportba kerüljön szám. Ha két felosztás csak abban különbözik egymástól, hogy csoportokat egészben felcserélünk, azt is különbözőnek számítjuk. (Pl. $k=4$, $n=3$-ra az $\{1\}$, $\{2\}$, $\{3{,}4\}$ felosztás és a $\{3,\ 4\}$, $\{2\}$, $\{1\}$ felosztás különböző.) Bebizonyítjuk, hogy $g(n,k)$-re teljesülnek a feladat egyenletei. Ekkor a fenti megjegyzés szerint $g(n,k)$ értéke minden (n,k) természetes számpárra kiszámítható és ugyanaz lesz az értéke, mint $f(n,k)$-é. Tehát $f(n,k)=g(n,k)$.

Másrészt a definícióból nyilvánvaló, hogy $n!$ osztója $g(n,k)$-nak, hiszen bontsuk fel az $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ halmazt tetszőlegesen n db nem üres, páronként diszjunkt A_1, A_2, $\ldots$, A_n halmazokra minden lehetséges módon. Minden ilyen felbontásból $n!$ féle módon készíthetünk csoportba osztást: ti. ennyiféleképpen lehet „megszámozni”, hogy az A_1, $\ldots$, A_n halmazok közül melyik legyen az első csoport, melyik a második stb. Nyilván minden csoportbaosztást megkapunk így, s mivel egyik A_i sem üres és nincs köztük átfedés, ezért minden felosztás különböző lesz.

Be kell még bizonyítanunk, hogy $g(0,0)=1$, $g(n,0)=g(0,n)=0$, ha $n\geqq 1$, és $g(n,k)=n[g(n-1,k-1)+g(n,k-1)]$. Nyilvánvaló, hogy ha $k<n$, akkor nincs elég szám, így $g(n,k)=0$, és az is világos, hogy $g(n,n)=n!$, az n-edrendű permutációk száma. Ebből $g(0,0)=1$, és $g(n,n)=n(n-1)!=n[g(n-1,n-1)+g(n,n-1)]$, hiszen $g(n,n-1)=0$. Legyen most $k>n$, és osszuk fel az $\{1,\ 2,\ \ldots,\ k\}$ halmazt n csoportra. Két eset van: 1. A k szám egy külön csoportot képez. 2. A k egy többelemű csoportban van.

Az első esetnél n-féle lehetőség van arra, hogy hányadik csoportban legyen a k, s a többi $n-1$ csoportba kell az $1,\ 2,\ \ldots,\ k-1$ számokat besorolni úgy, hogy minden csoportba jusson szám; erre $g(n-1,k-1)$ lehetőség van. Az 1. eset tehát $n\cdot g(n-1,k-1)$-féleképpen jöhet létre.

A második eset annyiféleképpen valósulhat meg, ahányféleképpen az $1,\ \ldots,\ k-1$ számokat n (nem üres) csoportba lehet osztani (ez $g(n,k-1)$ lehetőség), majd a k számot valamelyik csoportba betenni (ez minden esetben n lehetőség). A 2. eset tehát $n\cdot g(n,k-1)$-féleképpen valósítható meg. Több eset nem lévén azt kaptuk, hogy

$$g(n,k)=n[g(n,k-1)+g(n-1,k-1).]$$

Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Podoski Károly (Bp., Árpád Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján