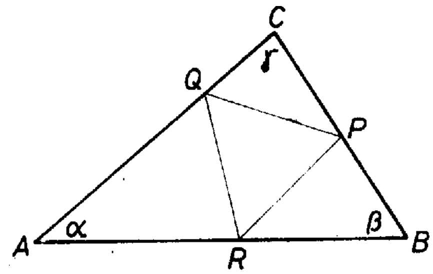
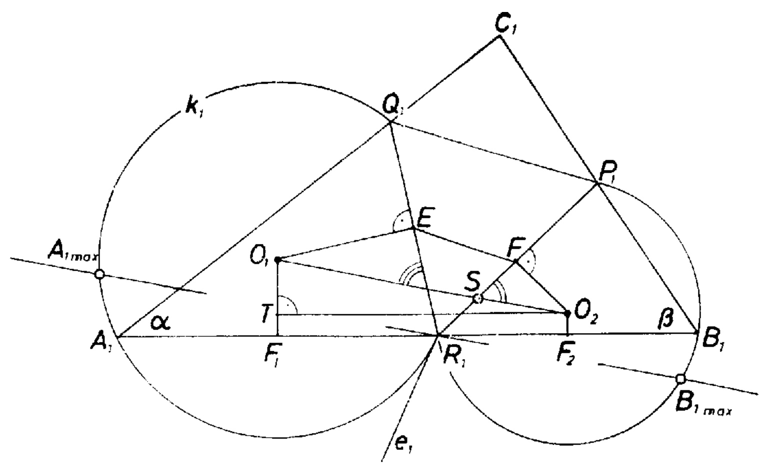
A feladat második követelménye nyilván úgy is megfogalmazható, hogy az $ABC$ és a megszerkesztendő háromszög kerületének aránya a lehető legnagyobb legyen. Legyenek az $ABC$ háromszög szögei $\alpha$, $\beta$ és $\gamma$, a szerkesztendő szabályos háromszög csúcsai pedig $P$, $Q$, $R$ (1. ábra).




*1. ábra*

A feladatot úgy fogjuk megoldani, hogy szerkesztünk egy, az $ABC$ háromszöghöz hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöget a beírt minimális oldalhosszúságú $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszöggel, és ez utóbbi ábrát egy alkalmas hasonlósági transzformációval oly módon képezzük le, hogy az $A_1$, $B_1$, $C_1$ pontok az $A$, $B$, $C$ pontokba menjenek át. A feladatban kívánthoz hasonló ábrát pedig úgy szerkeszthetjük meg, hogy felvesszük a $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszöget, és köré írjuk az $ABC$ háromszöghöz hasonló $A_1B_1C_1$ háromszöget úgy, hogy pl. $A_1B_1$ oldal a lehető legnagyobb legyen. (Így az $A_1B_1C_1$ háromszöghöz képest a $P_1Q_1R_1$ szabályos háromszög oldalhosszúsága minimális lesz.)




*2. ábra*

Föltehető, hogy $\alpha$ és $\beta$ hegyesszög. Az $A_1$ csúcsot a $Q_1R_1$ szakasz fölötti $\alpha$ szögű, $O_1$ középpontú, a $B_1$ csúcsot az $R_1P_1$ fölötti, $\beta$ szögű, $O_2$ középpontú látóköríveken kereshetjük, és e körívekből az $A_1$ és $B_1$ pontokat egy $R_1$ en átmenő egyenes metszi ki. A 2. ábrán a lehetséges 4 látókörívből kettőt rajzoltunk meg. (Mint később látni fogjuk, ez elegendő lesz.) Legyen az $A_1R_1$, illetve $R_1B_1$ szakasz felezőpontja $F_1$, illetve $F_2$, $O_2$ merőleges vetülete az $F_1O_1$ egyenesen pedig $T$. Világos, hogy

$$O_1O_2 \geqq TO_2 = F_1F_2 = \frac{1}{2}A_1B_1,$$

ezért $A_1B_1$ akkor lesz maximális, ha párhuzamos $O_1O_2$-vel. A lehetséges négy látókörív közül az ábrán láthatóak esetén lesz $O_1O_2$ a legnagyobb, ezért a két másik látókörívet nem kell figyelembe venni.

A szerkesztést a 2. ábra alapján könnyen elvégezhetjük.

A feladatnak legfeljebb egy megoldása lehet, mert (az $A_1B_1$ oldalként) $R_1$-en át $O_1O_2$-vel egyetlen párhuzamos húzható. Felmerülhet a kérdés, hogy ez a párhuzamos metszi-e mindkét látókörívet. Legyen az $\alpha$ látószögű $k_1$ ív $R_1$ pontbeli érintője $e_1$. Az ábrán megrajzolt $e_1$ félegyenes és $Q_1R_1$ szöge $180^\circ - \alpha$. Az $O_1EFO_2$ négyszögben az $E$ és $F$ csúcsoknál lévő szögek összege $300^\circ$, ezért a másik két szög összege $60^\circ$ (így mindegyikük $60^\circ$-nál kisebb). Ebből következik, hogy az ábrán két, ill. három ívvel jelölt szög nagyobb, mint $30^\circ$. Ezért, ha az $R_1$-en át $O_1O_2$-vel húzott párhuzamos nem metszené pl. a $k_1$ kört, akkor fennállna a következő:

$$\begin{aligned}(180^\circ - \alpha) + 60^\circ + 30^\circ < (180^\circ - \alpha) + 60^\circ + FSO_2\sphericalangle = \\ = F_1R_1E\sphericalangle + ER_1S\sphericalangle + FSO_2\sphericalangle < 180^\circ,\end{aligned}$$

azaz

$$\alpha > 90^\circ,$$

ami ellentmondás, hiszen $\alpha$ hegyesszög. Ezért az $A_1$, $B_1$ metszéspontok mindig léteznek, a feladatnak tehát pontosan egy megoldása van.