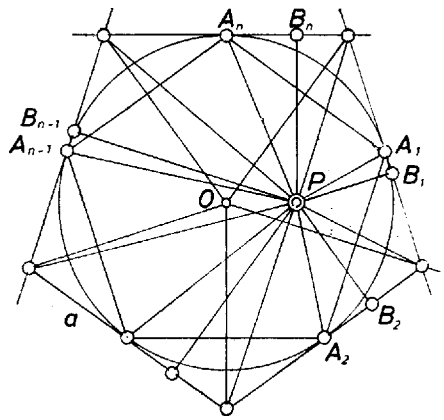
Húzzuk meg a körnek a csúcsokhoz tartozó érintőit. Ezek az érintők az r sugarú kör köré írt szabályos n-szög oldalegyenesei. Állítsunk merőlegeseket P-ből ezekre az oldalegyenesekre, és legyenek a talppontok B_1, B_2, ..., B_n.



Fejezzük ki az érintősokszög területét kétféleképpen, éspedig úgy, hogy a sokszöget P csúcsú, illetve O csúcsú háromszögekre bontjuk – ahol O a kör középpontja – és mindegyik háromszög alapja a körülírt sokszög egy-egy oldala. Jelöljük a körülírt sokszög oldalát a-val, ekkor a kétszeres területe:

$$a \cdot PB_1 + a \cdot PB_2 + \ldots + a \cdot PB_n = n \cdot a \cdot r, \quad \text{így}$$

$$PB_1 + PB_2 + \ldots + PB_n = n \cdot r. \tag{1}$$

A PA_iB_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ esetleg elfajuló derékszögű háromszögben

$$PA_i \geqq PB_i, \quad \text{tehát} \tag{2}$$

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n \geqq PB_1 + PB_2 + \ldots + PB_n, \tag{3}$$

ezért (1) alapján

$$PA_1 + PA_2 + \ldots + PA_n \geqq n \cdot r, \tag{4}$$

amint ezt bizonyítani kellett.

Világos, hogy (3)-ban és (4)-ben csak akkor lehet egyenlőség, ha (2)-ben az $i = 1, 2, \ldots, n$ esetek mindegyikére egyenlőség érvényes ; ez pedig nyilván csak akkor következik be, ha P egybeesik a kör középpontjával.

Megjegyzés. Ha n páros, a feladat állítása egyszerűbben is belátható. Nyilvánvaló ugyanis, hogy ha A_i és A_k átellenes csúcsok, akkor

$$PA_i + PA_k \geqq 2r.$$

Az összes különböző ilyen egyenlőtlenséget összegezve kapjuk a bizonyítandó állítást.

Benkő Dávid (Bp., Móricz Zs. Gimn., IV. o. t.) dolgozata alapján